دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق ریاضی

عنوان

ناتمامیت در یک چهارچوب کلی

استاد راهنما

سعید صالحی پور مهر

استاد مشاور

جعفر صادق عیوضلو

پژوهشگر

مینا محمّدیان

۱۳۹۲

تقدیم به:

مادر، تنهاترینم

و

روح پاک پدر و برادرم

بنام حضرت حق

همانا زکات علم نشر آن است.

من ... جوینده‌ای فروتن هستم که در جستجوی «حقیقت» است؛ و در راه رسیدن به آن از هیچ کوششی فروگذاری نمی‌کند. تمامی فعالیت من، چه آنها که اجتماعی یا سیاسی تلقی می‌شوند و چه آنها که انسان‌دوستانه و اخلاقی انگاشته می‌شوند، همگی در خدمت تحقق همین هدف هستند. و از آنجا که می‌دانم خدا اغلب در ضعیف‌ترین و حقیرترین مخلوقاتش یافت می‌شود و نه در مخلوقات قدرتمند و گردن‌فرازش، تلاش می‌کنم خود را به موقعیت چنین افرادی برسانم؛ و برای چنین کاری، چاره‌ای جز خدمت به آنان نمی‌بینم.

تمامی عشق و احترام من برای کسی است که به معنای واقعی یک استاد، آموزگار این دانشجوی سربه هوا بوده و نه تنها در بحث علمی که در مبحث سنگین زندگی نیز دیدگاه‌ها و اعتقادات عمیقی را در من برانگیخت. پس نه به پاس وظیفه بلکه به پاس ارادت و احترامم از زحمات بی دریغ ایشان که استاد راهنمایم بوده‌اند، جناب آقای دکتر **سعید صالحی پور مهر**، صمیمانه تشکر و قدردانی نموده و از خداوند بزرگ برایشان سلامت و سرافرازی هرچه بیشتر طلب می‌نمایم. از جناب آقای دکتر**جعفرصادق عیوضلو** که زحمت مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و جناب آقای دکتر **محمّد شهریاری** که با لطف و عنایت خویش قبول زحمت فرموده و داوری این پایان‌نامه را تقبل نمودند، کمال سپاس و امتنان را دارم.

در ادامه از زحمات ارزنده‌ی **جناب آقای دکتر اصغر رنجبری** و **جناب آقای دکتر مرتضی فغفوری** که همواره مشوق و پشتیبانم بوده‌اند قدردانی می‌نمایم. و در پایان از تمامی اعضای خانواده‌ام، دوستان و اساتید دانشکده علوم ریاضی که در طول دوران تحصیل همواره یار و حامی اینجانب بوده‌اند، تقدیر و تشکر می‌کنم.

مینا محمّدیان

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: محمّدیان نام: مینا
عنوان: ناتمامیت در یک چهارچوب کلی
استاد راهنما : سعید صالحی پور مهر استاد مشاور : جعفر صادق عیوضلو
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: منطق ریاضی دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۷۰
کلید واژه‌ها: قضایای ناتمامیت گودل، قضیه صدق تارسکی، قضیه چرچ، سازگاری

چکیده

در این پایان‌نامه ما یک چهارچوب کلی برای اثبات قضایای ناتمامیت گودل را که از آنِ بِل [۴] است، ارائه می‌کنیم. چهارچوب پیشنهادی وی رها از قید و بندهای نحوی و قواعد محاسباتی بوده و مناسب جهت بررسی قضیه‌ی تارسکی و قضایای ناتمامیت می‌باشد. اثبات مدنظر در حیطه‌ی ساختارهای جبری عمل کرده و برای آن یک سیستم کدگذاری انتزاعی معرفی می‌شود. به این منظور به چند ایده مهم از منطق صوری که ارتباط با «ناتمامیت» دارند، با تاکید بر قضایای ناتمامیت گودل [قضیه اوّل و قضیه دوم] خواهیم پرداخت. به عبارت دیگر مباحث:

(۱) تحلیل منطقی لوب از جملاتی که اثبات پذیری خود را ثابت می‌کنند،

(۲) نقش اصلی نقطه ثابت (تکنیک قطری‌سازی) در بررسی لوب، و

(۳) ناتمامیت در منطق موجهات،

را با تکیه بر اصول شهودی و ساختاری بررسی خواهیم کرد. سپس به بررسی پارادوکس دروغگو پرداخته و سعی بر نشان دادن این خواهیم داشت که ایده عمومی نهفته در سه قضیه‌ی گودل، تارسکی و چرچ، که روی محدودیت سیستم استنتاج صوری تمرکز می‌کنند، می‌تواند به عنوان راه‌های متفاوت دیگری برای حل پارادوکس دروغگو در نظر گرفته شود [۱۸].

فهرست مطالب

مقدمه

بشر از همان آغاز پیدایش خود در این کره خاکی در پی ابداع و اکتشاف جهان بوده و هست، هرچه جلوتر می‌رفت و به پاسخی دست می‌یافت برایش سوالات دیگری پدیدار می‌گشت. صبر کنید! ما می‌توانیم سال‌ها و شاید قرن‌ها زمان بگذاریم برای اختراع یک ماشین یا حل یک مسئله، اما... آری اینجا بود که جرقه‌ای به ذهن بشر خطور کرد، سوالی کلی و اساسی! آیا او می‌تواند چیزی ابداع یا کشف کند که پاسخگوی تمام سوالات ذهنش باشد؟ چه رویای باشکوهی!

این سوال به نظر بسیار سخت می‌نماید، کمی آن را تضعیف کرده و به این راضی می‌شویم که آیا می‌توانیم ماشینی طراحی کنیم که بگوید سوال ما جواب دارد یا نه؟ این سوال عاقلانه‌تر می‌نماید، با یافتن جواب این سوال، تکلیف خود را در مواجه با سوالات مشخص خواهیم کرد و دیگر سال‌ها خود را مشغول یافتن جواب سوالاتی که اصلا جوابی ندارند، نخواهیم کرد.

اکنون این سوال را می‌شکافیم تا آن را راحت‌تر بررسی کنیم. حرکت از بالا برای حل مسئله است. سوال اول این است، مگر می‌توان ادعا کرد می‌شود ماشینی ساخت که برای هر سوال (هر سوال!) جوابی داشته باشد؟

اگر قبول کنیم که همه چیز منشاء عددی یا ریاضی دارد[1]، آری این سوال بجا است. اگر هر سوال را بتوانیم با فرمول بیان کنیم، یافتن جواب آن را این‌گونه معنا می‌کنیم:

یافتن جواب برابر است با یک سری اصول به هم مرتبط یا از قبل پذیرفته شده‌ای که زنجیروار ما را به چیزی که عنوان جواب به آن می‌دهیم، برساند.

[1] چنین پیداست که فیثاغورثیان قدیم معتقد بوده‌اند که طبیعت سراسر نهاد ریاضی دارد. اگر به قول ارسطو اعتماد ورزیم فیثاغورسیان تا آنجا پیش رفتند که مدعی شدند حقیقت غایی و نهایی عدد است [۲۴].

اگر کمی به استنتاج‌های خود در حین حل یک مسئله بیاندیشید در می‌یابید زمانی‌که مسئله‌ای را حل می‌کنید ابتدا از یک سری فرضیات ذهنی (دانش قبلی) استفاده کرده و سپس با استدلال‌هایی که قبلاً برطبق قرارداد پذیرفته‌اید، جلو می‌روید تا به جواب برسید. در منطق به این حرکت زنجیروار که به جواب منجر می‌شود، عنوان برهان می‌نهیم و زمانی‌که سوالی دارای جواب باشد آن را برهان‌پذیر یا به اصطلاحِ صوری، اثبات‌پذیر گوییم. اکنون سوال اصلی ما به این شکل قالب رسمی‌تری به خود می‌گیرد: آیا برای یک مسئله ریاضی، الگوریتمی[۲] وجود دارد که جواب داشتن یا نداشتن آن را بگوید؟ این سوال لایب نیتس[۳] (ریاضیدان قرن ۱۷ام) بود که بعدها در زبان منطق با عنوان مسئله تصمیم‌گیری اثبات‌پذیری (قضیه چرچ) معروف شد:

آیا الگوریتمی وجود دارد که برای هر فرمول داده شده، اثبات‌پذیر بودن یا نبودن آن را بیان کند؟

سوال به جهان ریاضیات رسید. هیلبرت[۴] ریاضیدانی بود که ادعا کرد می‌توان نظریه منطقی (اصل موضوعی) برای کل ریاضیات ارائه داد به طوری که جوابگوی تمامی مسائل بوده و سازگار باشد. مفهوم سازگار بودن را به زبان عامیانه چنین گوییم که هیچ چیز غلطی را نتیجه ندهد. این ادعا در برخی نظریه‌ها تا حدودی قابل اجرا بود اما در مورد نظریه حساب به شکست منجر شد و در پایان این گودل[۵] بود که با قضایای معروف ناتمامیتش نقطه پایانی برای تلاش‌های هیلبرت گذاشت.

قضیه اول ناتمامیت گودل بیان می‌دارد که ما هرگز نمی‌توانیم یک نظام اصل موضوعی شامل همه چیز (فراگیر) بیابیم که قادر باشد همه‌ی صدق‌های ریاضی را اثبات و کذب‌ها را باطل کند. قضیه دوم ناتمامیت به بحث سازگاری می‌پردازد. در مفهومی که ما از سازگاری بیان کردیم این سوال به وجود می‌آید: چه کسی تشخیص می‌دهد این قانون نوشته شده (اصول موضوع) که نظام ما را تشکیل می‌دهد، سازگار است؟ آیا خود قانون‌گذار (نظام موجود) می‌تواند در مورد سازگاری آن اظهار نظر کند؟ بی شک نمی‌تواند. قضیه دوم ناتمامیت گودل بیان می‌دارد که اگر یک نظام سازگار باشد نمی‌تواند سازگاری خودش را اثبات کند. با این قضایای گودل متأسفانه مجبوریم بپذیریم که نمی‌توان

[۲] مجموعه‌ای متناهی از دستورالعمل‌ها که به ترتیب خاصی اجرا می‌شوند و مسئله‌ای را حل می‌کنند.

[۳] G. Leibniz

[۴] D. Hilbert

[5] K. Gödel

سیستمی فراگیر بنیان نهاد. اما همچنان که در ابتدای امر اشاره شد، بشر با دست یافتن به جواب سوالی با سوالات متعدد دیگری روبرو شده است، در اینجا نیز جواب گودل به حل سوال، باعث پیدایش سوالات دیگری شد.

در واقع گودل در قضیه اول خود نشان می‌دهد که احکامی را در ریاضیات می‌توان یافت که قابل صورت‌بندی در زبان ریاضی و واجد معنا هستند اما نه می‌توان صدق آنها را اثبات کرد و نه کذبشان را نشان داد. او با بیان جمله دروغگو «این جمله دروغ است» مثالی از عبارتی فراهم آورد که درست بودن و اثبات پذیری را مقابل هم قرار می‌داد! نمونه دیگر مسئله دهم هیلبرت است، این مسئله که در تئوری حساب بی‌نهایت معادله دیوفانتی بدون جواب وجود دارد که جواب نداشتن آن‌ها را نظریه نمی‌تواند اثبات کند (فرمول درستی که اثبات پذیر نیست).

پس از طرح چنین مسائلی، نیاز به تعریفی دقیق از مفهوم درستی (صدق) شدیداً احساس می‌شد اما تلاش‌ها همه بی فایده بود. هر تعریف پیشنهادی برای درستی پس از مدتی منجر به تناقض می‌شد. بالاخره این تارسکی[۶] بود که با قضیه معروف تعریف ناپذیری درستی، پایان بخش این تلاش‌ها شد. او ثابت کرد همان‌طور که سازگاری یک نظام را در خود نظام نمی‌توان اثبات کرد مفهوم درستی را نیز نمی‌توان در چهارچوب همان نظام تعریف کرد. اینجا بود که مفهوم فرا زبان مطرح گردید.

همان‌گونه که از مطالب فوق مشاهده می‌شود قضایای ناتمامیت گودل، قضیه تعریف ناپذیری درستی تارسکی و قضیه چرچ بیانگر محدودیت‌های هر نظام (هرچند غنی) می‌باشند که اجتناب ناپذیرند.

---

[۶] A. Tarski

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این پایان‌نامه که بر مبنای دو مقاله‌ی [۴] و [۱۸] تهیه شده است، ابتدا مقدمه‌ای از برخی مفاهیم مورد نیاز و قراردادهای ملزومه را بیان می‌کنیم، سپس در فصل دوم با ارائه‌ی چهارچوبی رها از قید و بندهای نحوی به اثبات قضایای اول و دوم ناتمامیت و قضیه تارسکی می‌پردازیم، و در فصل سوم با بیان پارادوکس دروغگو و تلاش برای صوری کردن آن، نشان خواهیم داد که محدودیت‌های مذکور چگونه از این پارادوکس قابل بیان هستند و به عبارتی این پارادوکس دلیلی برای وجود این محدودیت‌ها می‌باشد.

۲.۱ منطق موجهات

در این بخش ابتدا به بررسی منطق گزاره‌ها پرداخته و سپس به منطق موجهات خواهیم رسید [۲۶].
در منطق گزاره‌ها تنها نمادهای غیرمنطقی مجموعه‌ای نامتناهی و شمارا از حروف بوده و عملگرهای منطقی شامل $\neg$، $\wedge$ و $\vee$ می‌باشند. عملگرهای دیگر نیز همانند عملگر ثابت نادرست (غلط) $\perp$ و عملگر شرطی $\rightarrow$ نیز در این منطق وجود دارند. بیان نحوی منطق گزاره‌ها بسیار ساده و به این

صورت است که: هرکدام از حروف گزاره محسوب می‌شوند، ثابت $\perp$ نیز گزاره است و اگر A و B گزاره باشند $A \to B$ نیز گزاره خواهد بود.

بیان معنایی این منطق نیز ساده است: برای حروف، یک ارزش درستی همانند ω تعبیر می‌کنیم به طوری که برای درستی ارزش 1 و برای نادرستی (غلط) ارزش 0 را بدهد. اکنون اگر قرار دهیم $\omega(\perp) = 0$ و تعریف کنیم $\omega(A \to B) = 1$ تنها زمانی که $\omega(A) = 0$ یا $\omega(B) = 1$ باشد؛ می‌توانیم ارزش‌گذاری خود را به فرمول‌ها گسترش دهیم. بدین صورت که، $\neg A$ را معادل با فرمول $A \to \perp$ و $A \wedge B$ را معادل با $\neg(A \to \neg B)$ و $A \vee B$ را معادل $\neg A \to B$ بگیریم. یک گزاره D را نتیجه‌ای از مجموعه گزاره‌های Γ گوییم هرگاه در تمام تعابیری که گزاره‌های Γ درست‌اند، درست باشد و گوییم D معتبر است هرگاه در تمام تعابیر درست باشد.

منطق موجهات از اضافه کردن دو عملگر $\Box$ به معنای «لزوم» و $\Diamond$ به معنای «امکان» به همراه اضافه کردن یک شرط به گزاره‌ها که، اگر A یک گزاره باشد آنگاه $\Box A$ نیز گزاره خواهد بود، به منطق گزاره‌ها حاصل می‌گردد. در این منطق فرمول $\Diamond A$ را معادل با $\neg\Box\neg A$ می‌گیریم. یک گزاره در منطق موجهات را یک راستگو[1] نامیم هرگاه نتیجه‌ای از جانشینی گزاره‌های موجه به جای جملات معتبر منطق گزاره‌ها باشد. بنابراین، چون $p \vee \neg p$ برای هر حرف p در منطق گزاره‌ها معتبر است، لذا $A \vee \neg A$ یک راستگو برای هر گزاره موجه A در منطق موجهات می‌باشد. از آنجایی که q، از p و $p \to q$ نتیجه می‌شود، لذا برای هر گزاره موجه همچون A و B، B نتیجه منطقی از A و $A \to B$ خواهد بود. به این قاعده که B را از A و $A \to B$ نتیجه می‌دهد عنوان قاعده **MP**[2] (وضع مقدم) داده شده است.

سیستم‌های بسیار زیادی برای منطق موجهات وجود دارند که هر کدام به یک شکل به تعریف مفهوم اثبات (برهان) می‌پردازد. کوچکترین سیستم برای منطق موجهات نظام **K** است که به طریق زیر به دست می‌آید. اصول نظام **K** شامل تمام راستگوها و همه‌ی جملات به فرم

$$\Box(A \to B) \longrightarrow (\Box A \to \Box B)$$

می‌باشد و قواعد نظام **K** علاوه بر قاعده **MP** شامل قاعده دیگری نیز می‌باشد که از اثبات‌پذیری

---

[1] Tautology

[2] Modus Ponens

A، اثبات‌پذیری $\Box A$ را نتیجه می‌دهد؛ این قاعده با عنوان قاعده لزوم شناخته می‌شود. یک برهان در $\mathbf{K}$ یک دنباله از جملاتی است که هرکدام از آن‌ها یا یک اصل بوده و یا به وسیله‌ی قواعدی که عنوان شد به دست آیند. لذا یک گزاره زمانی اثبات‌پذیر یا یک قضیه در $\mathbf{K}$ می‌باشد که آخرین جمله از یک برهان باشد. برای یک مجموعه متناهی $\Gamma = \{C_1, \ldots, C_n\}$، $\bigwedge_i C_i$ را عطف همه‌ی اعضای Γ در نظر می‌گیریم و گوییم Γ ناسازگار است اگر $\neg \bigwedge_i C_i$ یک قضیه باشد. اگر D یک گزاره باشد، گوییم D از Γ نتیجه می‌شود هرگاه $\bigwedge_i C_i \to D$ یک قضیه باشد. نظام‌های قوی‌تری نیز برای منطق موجهات وجود دارند که با افزودن هرکدام از اصول زیر به نظام $\mathbf{K}$ پدید می‌آیند:

$$\Box A \to A \quad (T)$$

$$\Box A \to \Box\Box A \quad (4)$$

$$\Box(\Box A \to A) \to \Box A \quad (L).$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برخی از این اصول به اسامی خاصی معروف می‌باشند که برای نام‌گذاری نظام جدید استفاده می‌شوند. به طور مثال نظام $\mathbf{K4}$ نظامی است که از افزودن اصل (4) به نظام $\mathbf{K}$ به دست می‌آید. از نظام‌های دیگر برای منطق موجهات نظام $\mathbf{GL}$ است که با افزودن اصول (4) و (L) به نظام $\mathbf{K}$ به دست می‌آید.

۳.۱ قضایای صوری شده گودل، تارسکی و چرچ

۱.۳.۱ تصمیم پذیری

فرض کنید Γ کلاسی شامل جملات منطق مرتبه اول باشد. منظور از مسئله تصمیم‌گیری برای Γ، در واقع به معنای تصمیم‌گیری برای هر جمله S در Γ می‌باشد، بدین صورت که در زمان محدود اثبات‌پذیر بودن یا نبودن S را بگوید. از آنجا که S اثبات‌پذیر است اگر و تنها اگر $\neg S$ صدق‌پذیر نباشد و S صدق‌پذیر است اگر و تنها اگر $\neg S$ اثبات‌پذیر نباشد، لذا برای هر کلاسی همچون Γ به همراه عملگر $\neg$، مسئله تصمیم‌گیری Γ معادل با مسئله صدق‌پذیری برای Γ خواهد بود. به عبارت

دیگر، مسئله تصمیم‌پذیری برای Γ یعنی برای هر جمله S در Γ، در زمانی محدود صدق‌پذیری یا صدق‌ناپذیری S (داشتن مدل) را تصمیم‌گیری کند [۶].

قضیه ۱.۳.۱ (لم نقطه ثابت). *فرض کنید T یک نظریه صوری شامل حساب باشد. در این صورت برای هر فرمول $B(x)$ جمله‌ای مانند G وجود دارد که:* $T \vdash G \leftrightarrow B(\ulcorner G \urcorner)$.

قضیه ۲.۳.۱ (قضیه چرچ-هربراند[۳]). *مسئله صدق‌پذیری برای منطق مرتبه اول به‌طور الگوریتمی حل‌ناپذیر است.*

قضیه ۳.۳.۱ (قضیه اول ناتمامیت گودل). *فرض کنید T یک نظریه صوری شامل حساب باشد. یک جمله φ وجود دارد که اثبات‌ناپذیر بودن خودش را بیان می‌کند و به‌گونه‌ای است که:*

(۱) *اگر T سازگار باشد آنگاه $T \nvdash \varphi$.*

(۲) *اگر T، ω-سازگار باشد آنگاه $T \nvdash \neg\varphi$.*

قضیه ۴.۳.۱ (قضیه دوم ناتمامیت گودل). *اگر T یک نظریه صوری سازگار شامل حساب باشد، آن‌گاه $T \nvdash Con_T$ که در آن Con_T بیانگر سازگاری T است.*

قضیه ۵.۳.۱ (قضیه تارسکی). *در هر زبان $L \supseteq L_A$ که در آن $L_A = \{+, \cdot\}$ زبان حساب است، نمی‌توان فرمولی مانند $\Psi(x)$ نوشت که برای هر φ داشته باشیم:* $\mathbb{N} \models \Psi(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \varphi$.

۲.۳.۱ جبر هیتینگ

با توجه به این نکته که در فصل (۲) روی ساختارهای جبری و به خصوص جبر هیتینگ عمل خواهیم کرد، به بیان خصوصیات آن می‌پردازیم [۱]:

تعریف ۶.۳.۱. مجموعه A را با رابطه دوتایی $\leq_A$، مجموعه‌ی مرتب جزئی نامیم هرگاه برای هر $a, b, c \in A$ در شرایط زیر صدق کند:

[۳] Church-Herbrand

(۱) خاصیت انعکاسی: $a \leq_A a$

(۲) خاصیت تراگذاری: $a \leq_A b, b \leq_A c \longrightarrow a \leq_A c$

(۳) خاصیت پادتقارنی: $a \leq_A b, b \leq_A a \longrightarrow a = b$ ◎

تعریف ۷.۳.۱. یک جبر هیتینگ مجموعه‌ای مرتب جزئی دارای اعضای زیر می‌باشد:

(۱) اشتراک‌های متناهی 1 و $p \wedge q$ (1 بالاترین عضو باشد)؛

(۲) اجتماع‌های متناهی 0 و $p \vee q$ (0 پایینترین عضو باشد)؛

(۳) برای هر a و b یک عضو همانند $a \Rightarrow b$ چنان وجود دارد که:
$a \wedge b \leq c \longleftrightarrow a \leq b \Rightarrow c$.

با استفاده از روابط فوق چنین به دست می‌آید که: $(a \Rightarrow b) = \bigvee_{x \wedge a \leq b} x$.
بنابراین می‌توان عملگر $\neg$ را چنین تعریف کرد: $\neg x = (x \Rightarrow 0)$. ◎

۳.۳.۱ ω-سازگاری

مفهوم ω-سازگاری توسط گودل و به منظور بیان فرض‌های مورد نیاز برای قضیه اول ناتمامیت تعریف شد. ω-سازگاری T، شرایط به حد کافی بهینه و شهودی را برای قضیه فراهم نمی‌کند. با این وجود استفاده از آن در این بحث، بسیار قاطعانه در موضوعاتی که مجبور به استفاده از آن هستیم، نفوذ می‌کند. به طور غیر صوری، ω-سازگاری خصیصه‌ای است که برای T برقرار است اگر هیچ فرمول φ همزمان در دو شرط زیر صادق نباشد [۲۲]:

(۱) $T \vdash \exists x \varphi(x)$،

(۲) $T \vdash \neg\varphi(\overline{0}), \neg\varphi(\overline{1}), \neg\varphi(\overline{2}), \ldots$.

و به طور صوری، ω-سازگاری می‌تواند به فرم زیر نمایش داده شود:

$$\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \exists x \varphi(x) \urcorner) \longrightarrow \exists x \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg\varphi(\overline{x}) \urcorner)$$

مثال ۱.۳.۸. فرض می‌کنیم $L = \{0, S, \alpha\}$ که در آن S تابعی تک موضعی و α ثابت (مخالف 0) با اصول موضوع زیر باشد:

$$S(x) \neq 0 \quad (1)$$

$$S(x) = S(y) \to x = y \quad (2)$$

$$S(\alpha) = \alpha \quad (3).$$

در این صورت خواهیم داشت: برای هر تِرم t $T \vdash \neg S(\bar{t}) = \bar{t}$ و $T \vdash \exists x(S(x) = x)$.
بنابراین T، ω-ناسازگار است.

۱.۴ پارادوکس‌ها

آنچه تناقض آمیز، باورنکردنی یا خلاف انتظار و شهود ماست (آنچه به نظر درست می‌رسد ولی غلط است، به نظر غلط می‌رسد ولی درست است، یا به نظر غلط می‌رسد و واقعاً غلط است) پارادوکس یا باطل‌نما خوانده می‌شود [۲۵]. ممکن است فکر کنیم که پارادوکس‌ها ربطی به ریاضیات ندارند، یا این‌که جزو «ریاضیات واقعی» نیستند. و یا اساساً حقه و شعبده‌اند و به همین دلیل مفید نیستند، اما نه تنها چنین نیست بلکه عده‌ی زیادی آن‌ها را بخشی از ریاضیات به حساب می‌آورند که از نظر تاریخی در ایجاد انگیزه برای گسترش مرزهای دانش، تعمیق بینش، تعمیم شیوه‌های استدلال، افزایش دقت و وضع قوانین زبان شناختی جدید تأثیر شگرف داشته‌اند. مثلاً پارادوکس‌های زِنون در تکامل حسابان در قرن‌های ۱۷ تا ۱۹، پارادوکس‌های نظریه مجموعه‌ها مانند پاراداوکس‌های بورالی فورتی، کانتور و راسِل در تدقیق نظریه (شهودی) مجموعه‌های کانتور، پارادوکس دروغگو در طرح برهان قضیه‌ی ناتمامیت گودل در قرن بیستم (که می‌گوید «این جمله اثبات شدنی نیست» در درون یک دستگاه صوری به قدر کافی بزرگ اثبات شدنی نیست)، نقش به سزایی داشتند.
بعضی پارادوکس‌ها که متضمن تناقض هستند، صادق به نظر می رسند و حتی این ایده را به ذهن نزدیک می‌کنند که چرا تناقض‌ها را نپذیریم. می‌دانیم در ریاضیات کلاسیک به استناد استنتاج معتبر $(\neg A \wedge A) \Rightarrow B$، تناقض هر چیزی را نتیجه می‌دهد. اما چرا باید به این مطلب گردن نهاد؟ در

واقع نوعی منطق به نام پیراسازگار[۴] وجود دارد که در آن تناقض پذیرفتنی است و برخلاف ریاضیات کلاسیک، چنین نیست که از تناقض هر چیزی نتیجه شود.
ابزارهای متفاوتی برای رفع و رجوع پاراداوکس‌ها به کار گرفته شده‌اند. به‌طور مثال می‌توان از فرازبان برای تفکیک جملات به لایه‌های مختلفی با نام‌های نوع اول، نوع دوم و ... که روی آن‌ها درستی و نادرستی به‌طور مستقل تعیین می‌شوند استفاده کرد، کاری که مثلاً در مورد پارادوکس دروغگو که بیان می‌دارد «آنچه می‌گویم دروغ است» انجام شدنی است. برای مثال تارسکی با تقسیم زبان به دو لایه *زبان موضوعی* که در مورد اشیای نامربوط به زبان صحبت می‌کند و *فرازبان* که در مورد زبان موضوعی سخن می‌راند، استدلال می‌کند که وقتی می‌گوییم «آنچه می‌گویم دروغ است»، عبارت «دروغ است» که متعلق به فرازبان است در لایه موضوعی به کار رفته است و لذا از نظر ساختار منطقی اشکال دارد. با این حال، هربار که پارادوکسی در ریاضیات (وعلم) ظاهر می‌شود، برای حل آن باید فهم خود را از آنچه داریم بهبود بخشیم یا تصحیح کنیم یا قوانین زبان شناختی مناسب وضع کنیم و این دلیل، برای قراردادن پارادوکس‌ها در کالبد ریاضیات و جدی گرفتن آنها کافی به نظر می‌رسد. در ادامه به بیان برخی پارادوکس‌های مهم می‌پردازیم.

۱.۴.۱ پارادوکس بِری

این پارادوکس اولین بار در نوشته‌های راسل با انتساب آن به آقای جی‌جی بری[۵]، کتابدار دانشگاه آکسفورد، آمده است. عبارت «اولین عددی که نمی‌تواند با کم‌تر از هزار کلمه فارسی مشخص شود» فقط دوازده کلمه دارد و بنابراین عدد مورد نظر می‌تواند با کم‌تر از هزار کلمه مشخص شود!

۲.۴.۱ پارادوکس راسِل

فرض کنید φ خاصیت عضو خود نبودن باشد و $A = \{x \mid \varphi(x)\} = \{x \mid x \notin x\}$. پس بنابه نظریه مجموعه‌های کانتور، A یک مجموعه است و لذا یا $A \in A$ یا $A \notin A$. اگر $A \in A$ باشد

[۴] Parconsistent

[5] G. G. Berry

بنابر تعریف A، $A \notin A$؛ و اگر $A \notin A$، باز هم از تعریف A، $A \in A$ نتیجه می‌شود. پس در هردو حالت به تناقض می‌رسیم.

۳.۴.۱ پارادوکس خودنامصداق

خود نامصداق، صفتی است که در مورد خود کلمه صدق نمی‌کند. پس کلمه «خودنامصداق» خود نامصداق است اگر و تنها اگر خود نامصداق نباشد!

۴.۴.۱ پارادوکس دروغگو

می‌گویند روزی ائوبولیدُس[۶]، متفکر یونانی قرن چهارم قبل از میلاد، گفت «آنچه الان می‌گویم دروغ است». اگر گفته‌ی او درست باشد، آن‌گاه بنابه آنچه گفته است، باید گفته‌اش دروغ باشد؛ واگر گفته‌ی او دروغ باشد، دوباره بنابه آنچه گفته است نتیجه می‌شود که گفته‌اش درست است.

[۶] Eubulides

فصل ۲

ناتمامیت در یک چهارچوب کلی

۱.۲ مقدمه

اثبات کامل قضایای گودل کاری بس پیچیده و دشوار است. پیچیدگی این قضایا عمدتاً در جزئیات کدگذاری و بررسی خواص یک سیستم کدگذاری برای نمایش مفاهیم نحوی زبان (عمدتاً زبان حساب) در همان زبان می‌باشد. این جزئیات به ندرت واضح و اکثراً در هسته‌ی تیره و تار استدلال قرار دارند. به همین علت برخی تلاش کرده‌اند تا اساس اثبات قضایای گودل را بدون افتادن در منجلاب قواعد نحوی و جزئیات محاسباتی نشان دهند. یکی از این تلاشهای مهم توسط لوب[۱] [۱۲] در ارتباط با بررسی جملاتی که اثبات‌پذیری خود را ادعا می‌کنند، به وجود آمده است. لوب سه شرط را تنظیم کرد (که اکنون با قواعد اثبات پذیری هیلبرت- بِرنِی-لوب[۲] شناخته می‌شوند) که در مورد محمول اثبات‌پذیری در یک سیستم شرایط کافی را برای اثبات قضیه دوم ناتمامیت گودل (۴.۳.۱) ارائه می‌کنند.

اصلی که نقش اساسی در بررسی‌های لوب را ایفا می‌کرد، بعدها به نام قطری سازی یا خاصیت نقطه ثابت یک سیستم صوری شناخته شد. خاصیتی که قبلاً در ماهیت اثبات قضایای ناتمامیت

---

[۱] M. H. Löb

[۲] Hilbert-Bernays-Löb

گودل وجود داشت. قضایای ناتمامیت موضوع مورد بررسی تحقیقات پیشرفته در چهارچوب منطق موجهات هستند. در این فرمول‌بندی، عملگر موجه همان نقشی که قبلاً توسط محمول اثبات‌پذیری ایفا می‌شد را به عهده می‌گیرد و قواعد استنتاج در قالب قواعد جبری ترجمه می‌شوند (که اصطلاحاً قواعد GL یعنی گودل-لوب نامیده می‌شوند).

۲.۲ ساخت سیستم کدگذاری

هدف ما نشان دادن چهارچوبی برای پدیده‌ی ناتمامیت است که به طور کامل سازگار با اصول شهودی یا ساختنی بوده و ساختار اصلی که همان ایده روش کدگذاری است، حفظ شده است. در حالت کلی، این چهارچوب به طور کامل خالی از قواعد نحوی است. در این چهارچوب، کدهایی که برای یک مجموعه ناتهی انتخاب می‌شوند مجموعه اعداد طبیعی می‌باشند و اشیایی که کدگذاری می‌شوند اعضایی از یک مجموعه ناتهی دلخواه می‌باشند که مجموعه جملات نامیده می‌شود. در واقع این جملات قرین جملات زبان صوری مفروض هستند، همچنین فرض خواهیم کرد مجموعه جملات مجهز به یک رابطه هم‌ارزی است که رابطه اثبات‌پذیری در یک نظریه را نیز حفظ می‌کند. کلاس‌های هم‌ارزی حاصل از این رابطه هم‌ارزی را گزاره‌ها می‌نامیم. توجه داشته باشید که، در نظریه‌های کلاسیک، مجموعه گزاره‌ها به فرم فوق تشکیل یک جبر بولی می‌دهند اما در نظریه‌های شهودی که مدنظر ما می‌باشند، مجموعه گزاره‌ها تشکیل یک جبر هیتینگ می‌دهند که در واقع یک شبکه همانند $(L, \leq, \wedge, \vee)$ با عضو بالای 1 و عضو پایین 0 و دارای عملگر دوتایی $\Rightarrow$ با این شرایط که $x \wedge y \leq z$ اگر و تنها اگر $x \leq y \Rightarrow z$، می‌باشد. اگر اعضای یک جبر هیتینگ را به عنوان گزاره‌های حاصل از یک نظریه در نظر بگیریم در این‌صورت رابطه $\leq$ به عنوان رابطه هم‌ارزی که قبلاً اشاره شد و عملگرهای $\wedge$، $\vee$، $\Rightarrow$، $\neg$، 0 و 1 به ترتیب به معنای عملگر عطف، فصل، شرطی، نقیض، دوشرطی و گزاره ردشدنی و گزاره اثبات‌پذیر تعبیر خواهند شد. یعنی برای گزاره‌ای همانند α، این ادعا که $\alpha = 1$، به این معنا است که α اثبات‌پذیر می‌باشد. سازگاری نظریه نیز با این پیش فرض که جبر گزاره‌ها حداقل دارای دو عضو است، به وسیله این ادعا $1 \neq 0$، به دست می‌آید.

به عنوان نظریه پیش فرض، نظریه شهودی مجموعه‌ها را با صوری سازی خودش [۵] در نظر

می‌گیریم. فرض کنید Σ، مجموعه‌ی جملات و C مجموعه‌ی کدها بوده و نیز Σ و C شامل حداقل دو عضو باشند. اعضای Σ^C شامل فرمول‌های با یک متغیر آزاد روی C است و اعضای ثابت Σ^C جملات می‌باشند. برای هر $\omega \in \Sigma$، نگاشت $C \to \Sigma$ با مقدار ثابت ω را با $\tilde{\omega}$ نشان می‌دهیم (یعنی $\tilde{\omega}(x) = \omega$). همچنین موارد زیر را فرض می‌کنیم:

- یک رابطه هم‌ارزی $\approx$ روی Σ تعریف می‌کنیم. برای هر $\omega \in \Sigma$ کلاس هم‌ارزی ω را با $[\![\omega]\!]$ نشان می‌دهیم و $\Omega(\Sigma)$ را مجموعه تمام این کلاس‌های هم‌ارزی در نظر گرفته و به اختصار با Ω نشان می‌دهیم. اعضای Ω را گزاره می‌نامیم و برای هر $\omega \in \Sigma$، $[\![\omega]\!]$ گزاره وابسته به جمله ω نامیده می‌شود.

- L را یک زیر تکواره از Σ^Σ می‌گیریم به طوری که هر عضوش در خاصیت $\approx$ صدق کند. اعضای L را نگاشت‌های منطقی می‌نامیم. هر نگاشت منطقی (هر خودریختی حافظ $\approx$ روی Σ) همانند f به ازای هر $\omega \in \Sigma$، یک نگاشت $f^* : \Omega \to \Omega$ با ضابطه $f^*([\![\omega]\!]) = [\![f(\omega)]\!]$ القا می‌کند. گاهی اوقات یک نگاشت منطقی را با خودریختی که روی Ω القا می‌کند می‌شناسیم، بنابراین نگاشت‌های منطقی می‌توانند روی Ω عمل کنند.

- K زیر مجموعه‌ای از Σ^C شامل توابع ثابت $\tilde{\omega}$ است. اعضای K توابع کدپذیر نامیده می‌شوند. فرض کنید L روی K عمل می‌کند که در این صورت K تحت ترکیب با اعضای L از چپ بسته است.

- یک نگاشت کدگذاری $k : \mathrm{K} \to C$ با ضابطه $k(\varphi) = \ulcorner\varphi\urcorner$ داریم. برای هر $\omega \in \Omega$ به طور اختصار به جای $\ulcorner\tilde{\omega}\urcorner$، $\ulcorner\omega\urcorner$ را می‌نویسیم. اشیای $\ulcorner\omega\urcorner$ و $\ulcorner\varphi\urcorner$ را به ترتیب کد ω و φ نامیم.

اکنون با توجه به داده‌های فوق، شش‌تایی $\mathcal{A} = (\Sigma, C, \approx, \mathrm{K}, \mathrm{L}, k)$ را یک گردایه کدگذاری می‌نامیم. $\mathcal{A}$ سازگار است، اگر Ω حداقل 2 عضو داشته باشد. برای یک گردایه کدگذاری ثابت $\mathcal{A}$ گوییم خودریختی f روی Σ کدپذیر است هرگاه $\varphi \in \mathrm{K}$ی وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\omega \in \Sigma$ داشته باشیم $f(\omega) \approx \varphi(\ulcorner\omega\urcorner)$. در این حالت f به عنوان تابعی از کدها (وابسته به رابطه $\approx$) تعبیر می‌شود و φ یک نماینده کدگذاری برای f نامیده می‌شود. متقابلاً، برای $\varphi \in \mathrm{K}$ داده شده، نگاشت

$\varphi^\dagger : \Sigma \to \Sigma : \omega \mapsto \varphi(\ulcorner\omega\urcorner)$، خودریختی القا شده توسط φ روی Σ نامیده می‌شود؛ اگر $\varphi^\dagger$ حافظ $\approx$ باشد، گوییم φ حافظ تساوی است. واضح است که اگر φ حافظ تساوی باشد $\varphi^\dagger$ کدپذیر خواهد بود. خودریختی‌های القا شده روی Ω به وسیله خودریختی‌های روی Σ، خودریختی‌های کدپذیر روی Ω نامیده می‌شوند. اکنون می‌توانیم گزاره زیر را اثبات کنیم.

۱.۲.۲ قضیه‌ی تارسکی

گزاره ۱.۲.۲. *گزاره های زیر هم ارزند:*
(i) *هر نگاشت منطقی روی Σ کدپذیر است.*
(ii) *نگاشت همانی $1_\Sigma : \Sigma \to \Sigma$ کدپذیر است.*

برهان. برهان $(i) \leftarrow (ii)$ واضح است.
$(ii) \leftarrow (i)$: از فرض، $\tau \in \mathrm{K}$ وجود دارد که برای هر $\omega \in \Sigma$ داریم $\tau(\ulcorner\omega\urcorner) \approx \omega$. در این صورت برای هر تابع منطقی f، $f \circ \tau$ یک نماینده کدگذاری برای f است. ⊞

هر نماینده کدگذاری τ برای 1_Σ را نگاشت تارسکی می‌نامیم ($\omega \approx \tau(\ulcorner\omega\urcorner)$). این نگاشت متناظر آنچه را که در کُتب T-طرح تارسکی نامیده می‌شود، ارضا می‌کند. بنابراین یک نگاشت تارسکی، متناظر با یک تعریف درستی است. از برابری بالا، فوراً نتیجه می‌شود که یک نگاشت تارسکی یا تعریف درستی در واقع یک معکوس چپ وابسته به هم‌ارزی $\approx$ برای نگاشت کدگذاری $C \to \Sigma : \ulcorner\omega\urcorner \mapsto \omega$ است. قدم بعدی ما اثبات قضیه‌ای است که معمولاً با نام لم نقطه ثابت شناخته می‌شود [$\leftarrow$ [۲۲] قضیه (۲.۲.۱)].

تعریف ۲.۲.۲. (i) یک خودریختی f روی Σ را قطری‌شونده گوییم هرگاه $\Phi \in \mathrm{K}$ی وجود داشته باشد که برای هر $\psi \in \mathrm{K}$ داشته باشیم:
$$f(\psi(\ulcorner\psi\urcorner)) \approx \Phi(\ulcorner\psi\urcorner)$$
Φ نمایش قطری f نامیده می‌شود. شایان ذکر است که اگر f قطری‌شونده و ρ نگاشت منطقی باشد، آنگاه $\rho \circ f$ نیز قطری‌شونده خواهد بود.
(ii) فرض کنید f یک خودریختی حافظ $\approx$ روی Σ باشد، گوییم $\alpha \in \Sigma$ یک $\approx$-نقطه ثابت f است

هرگاه $[\![f(\alpha)]\!] = [\![\alpha]\!]$. واضح است که α یک $\approx$-نقطه ثابت f است اگر و تنها اگر $[\![\alpha]\!]$ یک نقطه ثابت برای خودریختی القا شده توسط f روی Ω باشد. ◎

لم ۳.۲.۲. (i) *هر خودریختی قطری‌شونده روی Σ یک $\approx$-نقطه ثابت دارد.*
(ii) *ترکیب نگاشت قطری‌شونده حافظ $\approx$ با یک نگاشت منطقی، دارای یک $\approx$-نقطه ثابت است.*

برهان. (i) اگر f یک خودریختی قطری‌شونده روی Σ با نمایش قطری $\Phi : C \to \Sigma$ باشد، در این صورت به سادگی دیده می‌شود که $\Phi(\ulcorner\Phi\urcorner)$ یک $\approx$-نقطه ثابت برای f خواهد بود.
(ii) فرض کنید f یک خودریختی حافظ $\approx$ روی Σ و ρ یک نگاشت منطقی باشد. در این صورت بنابر تعریف $\rho \circ f$ قطری‌شونده خواهد بود و لذا بنابر قسمت (i) دارای یک $\approx$-نقطه ثابتی همانند ω می‌باشد. بنابراین $f(\rho(f(\omega))) \approx f(\omega)$ یعنی $f(\omega)$ یک $\approx$-نقطه ثابت برای $f \circ \rho$ است. ⊞

تعریف ۴.۲.۲. نگاشت $d : C \to C$ را یک نگاشت قطری برای گردایه کدگذاری $\mathcal{A}$ گوییم هرگاه:
(i) به ازای هر $\varphi \in \mathrm{K}$، $d(\ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\varphi(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner$، و
(ii) K تحت ترکیب با d از راست بسته است، یعنی اگر $\varphi \in \mathrm{K}$ باشد، داریم $\varphi \circ d \in \mathrm{K}$. ◎

لم ۵.۲.۲. *اگر گردایه کدگذاری دارای نگاشت قطری باشد آنگاه هر خودریختی کدپذیر روی Σ قطری‌شونده است.*

برهان. فرض کنید f یک خودریختی کدپذیر روی Σ با نماینده کدگذار $\Phi \in \mathrm{K}$ باشد. قرار می‌دهیم $\Phi^* = \Phi \circ d \in \mathrm{K}$، در این صورت برای $\psi \in \mathrm{K}$ خواهیم داشت:

$$f(\psi(\ulcorner\psi\urcorner)) \approx \Phi(\ulcorner\psi(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner) \approx \Phi(d(\ulcorner\psi\urcorner)) \approx \Phi^*(\ulcorner\psi\urcorner).$$

بنابراین Φ^* نمایش قطری f بوده و لذا f قطری‌شونده خواهد بود. ⊞

اکنون لم (۳.۲.۲) و لم (۵.۲.۲) نتیجه می‌دهند:

لم ۶.۲.۲ (لم نقطه ثابت)**.** *فرض کنید گردایه کدگذاری $\mathcal{A}$ دارای یک نگاشت قطری باشد، در این صورت:*
(i) *هر خودریختی کدپذیر روی Σ یک $\approx$-نقطه ثابت دارد.*

(ii) ترکیب یک خودریختی کدپذیر حافظ $\approx$ با یک نگاشت منطقی دارای یک $\approx$-نقطه ثابت است.
(iii) هر خودریختی کدپذیر روی Ω و هر ترکیبش با یک نگاشت منطقی دارای نقطه ثابت می‌باشند.

حال از گزاره‌ی (۱.۲.۲) و لم نقطه ثابت (۶.۲.۲) نتیجه می‌شود که اگر یک گردایه کدگذاری دارای یک نگاشت قطری و یک نگاشت تارسکی باشد در این صورت هر نگاشت منطقی روی Σ یک $\approx$-نقطه ثابت دارد؛ بنابراین قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۷.۲.۲ (قضیه تارسکی). *اگر مجموعه Σ از جملات در یک گردایه کدگذاری $\mathcal{A}$، دارای یک نگاشت قطری و یک نگاشت منطقی بدون $\approx$-نقطه ثابت باشد یا معادلاً اگر مجموعه Ω از گزاره‌ها در یک گردایه کدگذاری $\mathcal{A}$، دارای یک نگاشت منطقی بدون نقطه ثابت باشد، آنگاه $\mathcal{A}$ نگاشت تارسکی ندارد.*

قضیه تارسکی با این صورت‌بندی در حالت خاص برای Ωی که جبر هیتینگ بوده و دارای حداقل دو عضو و نگاشت $\neg$ روی آن (که $\neg$ دارای نقطه ثابت نیست) تعریف شده و جزو نگاشت‌های منطقی محسوب می‌شود، صدق می‌کند. و این به نوبه‌ی خود ما را برای بازآفرینی صورت‌بندی متداول قضیه تارسکی از روی تعریف‌ناپذیری درستی، توانا می‌سازد. به این ترتیب برای گزاره‌های جبری یک نظریه‌ی سازگار T حداقل با دو عضو، ثابت می‌شود که زبان T حداقل شرایط برای تولید یک گردایه کدگذاری را داراست و پیرو آن، گردایه کدگذاری متناظر، نگاشت تارسکی ندارد. به این معنی که زبان نظریه T شامل تعریف درستی برای T نیست. به عبارت دیگر T در T تعریف‌ناپذیر است.

۳.۲ مثال‌هایی از سیستم کدگذاری

۱.۳.۲ حساب پئانو

در این مورد، اجزای گردایه کدگذاری $\mathcal{P}$ به صورت زیر می‌باشند: Σ، مجموعه جملات زبان L از حساب شهودی مرتبه اول، Ω مجموعه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی زبان L از حساب شهودی مرتبه اول PA تحت رابطه‌ی $\approx$ (که در اینجا آن را رابطه اثبات‌پذیری در نظر می‌گیریم) در PA بوده و C مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ از اعداد طبیعی و K مجموعه نگاشت‌های به فرم $\varphi : n \to \psi(\underline{n})$ است، که در آن

$\psi(x)$ یک فرمول در L با حداکثر یک متغیر آزاد و $\underline{n}$ ترم نمایانگر n در L است. نگاشت کدگذاری k با $k(\varphi) = \#\psi$ که درآن $\#$ بیانگر عدددهیِ گودلی فرمول‌های L است، داده شده و نگاشت قطری $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ با ضابطه $d(m) = s(m, m)$ می‌باشد که در آن نگاشت $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ یک تابع جایگزینی بازگشتی روی اعداد گودلی است، و سر انجام L، شامل نگاشت های $\sigma \mapsto \sigma$، $\sigma \mapsto \neg\sigma$ و $\sigma \mapsto \neg\neg\sigma$ است.

فرض کنید PA سازگار است. این نتیجه می‌دهد که بنابر مشاهدات فوق $\mathcal{P}$ هیچ نگاشت تارسکی ندارد و لذا درستی در $\mathcal{P}$ تعریف‌ناپذیر در $\mathcal{P}$ است. برای هر نظریه‌ی به طور بازگشتی اصل‌پذیر T که توسیعی از PA باشد، یک گردایه کدگذاری $\mathcal{T}$ مشابه $\mathcal{P}$ می‌توان ساخت و لذا نتیجه مشابه برای تعریف‌ناپذیری درستی در آنجا به دست می‌آید.

۲.۳.۲ نظریه شهودی مجموعه‌ها

در نظریه کلاسیک مجموعه‌ها، مجموعه‌ی توانی $\mathscr{P}(A)$ از A تحت عملگرهای نظریه مجموعه‌ای، یک جبر بولی است. لذا در نظریه شهودی مجموعه‌ها، مجموعه توانی تحت همان عملگرها یک جبر هیتینگ است. در حالت خاص 1 را به عنوان مجموعه‌ی تک عضوی $\{0\}$ درنظر می‌گیریم و $\mathscr{P}(1)$ یک جبر هیتینگ است که با Π نشان می‌دهیم. اگر σ یک جمله از نظریه مجموعه‌ها باشد، عضو $\{x : x = 0 \wedge \sigma\}$ از Π را با $\{0 \mid \sigma\}$ نشان می‌دهیم. از اصل گسترش نتیجه می‌شود که $\{0 \mid \sigma\} = \{0 \mid \sigma'\}$ اگر و تنها اگر $\sigma \leftrightarrow \sigma'$. بنابراین اعضای Π به طور طبیعی معادل با چیزی است که ما گزاره نامیدیم.

در این مورد جمله‌ها تحت رابطه‌ی اثبات‌پذیری از اصول نظریه شهودی مجموعه‌ها معادل‌اند. تحت این معادل‌سازی هر عضو $\omega \in \Pi$ وابسته به گزاره‌ی $0 \in \omega$ بوده و هر گزاره‌ی σ وابسته به عضو $\{0 \mid \sigma\}$ از Π می‌باشد. همچنین Π نقش یک مشخصه برای مجموعه دلخواه A را بازی می‌کند. به این صورت که برای هر مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌های A در ارتباط پوشا با نگاشت‌های $A \to \Pi$ می‌باشند که هر زیرمجموعه‌ی $X \subseteq A$ را با نگاشت $\{0 \mid x \in X\} : A \to \Pi$ $x \mapsto$ و هر نگاشت $f : A \to \Pi$ را با زیرمجموعه‌ی $f^{-1}(1)$ از A مرتبط می‌کند. عضو بالای (پایین) $1(\varnothing)$ از Π معادل با گزاره‌ی درست (غلط) است. به این ترتیب مشاهده می‌شود که Π^A به طور طبیعی یکریخت با

$\mathscr{P}(A)$ است.

اکنون ساختن یک گردایه کدگذاری را با در نظر گرفتن Π به عنوان مجموعه‌ی جملات و رابطه همانی به عنوان رابطه هم‌ارزی، آغاز می‌کنیم. طبیعی است که در اینجا C را مجموعه‌ای می‌گیریم که حداقل شامل یک عضو باشد و قرار می‌دهیم $\mathrm{L} = \Pi^{\Pi}$ و $\mathrm{K} = \Pi^{C}$. با توجه به مشاهدات فوق، می‌توانیم K را برابر با $\mathscr{P}(C)$ بگیریم. نگاشت کدگذاری k را نگاشت دلخواه $\mathscr{P}(C) \to C$ در نظر می‌گیریم و برای هر $X \in \mathscr{P}(C)$، نماد $\ulcorner X \urcorner$ را برای $k(X)$ در نظر می‌گیریم. برای $\omega \in \Pi$، نگاشت ثابت $\tilde{\omega} : C \to \Pi$ مرتبط با عضو $\omega^* = \{x \in C : 0 \in \omega\}$ از $\mathscr{P}(C)$ است. می‌توانیم به جای $\ulcorner \omega^* \urcorner$ تنها بنویسیم $\ulcorner \omega \urcorner$. نگاشت $\ulcorner \bullet \urcorner : \Pi \to C$ ، $\omega \mapsto \ulcorner \omega \urcorner$، نگاشت کدگذاری روی Π است.

شش‌تایی $\mathcal{Q} = (\Pi, C, =, \mathscr{P}(C), \Pi^{\Pi}, k)$ یک گردایه کدگذاری است. آیا $\mathcal{Q}$ می‌تواند یک نگاشت قطری داشته باشد؟ همان طور که در ادامه نشان خواهیم داد، تا زمانی که نگاشت کدگذاری روی Π حداقل شرایط[۳] برای یک به یک بودن را داشته باشد، این گردایه نمی‌تواند نگاشت قطری داشته باشد. در حقیقت اگر $\ulcorner \bullet \urcorner$ یک‌به‌یک باشد یک بحث شبیه پارادوکس راسل نشان می‌دهد که $\mathcal{Q}$ نمی‌تواند نگاشت قطری داشته باشد. زیرا برای هر نگاشت قطری d با ضابطه

$$\forall X \in \mathscr{P}(C) : \qquad d(\ulcorner X \urcorner) = \ulcorner \{0 \mid \ulcorner X \urcorner \in X\} \urcorner \tag{۱.۲}$$

می‌توانیم مجموعه $U = \{x \in C : d(x) = \ulcorner \varnothing \urcorner\}$ را تعریف کنیم. اکنون با استفاده از (۱.۲) و یک‌به‌یک بودن $\ulcorner \bullet \urcorner$ داریم:

$$\ulcorner U \urcorner \in U \longleftrightarrow d(\ulcorner U \urcorner) = \ulcorner \varnothing \urcorner \longleftrightarrow \ulcorner \{0 \mid \ulcorner U \urcorner \in U\} \urcorner = \ulcorner \varnothing \urcorner$$

$$\longleftrightarrow \{0 \mid \ulcorner U \urcorner \in U\} = \varnothing \longleftrightarrow \ulcorner U \urcorner \notin U$$

که تناقض است.

[۳] این حداقل شرایط برای یک به یکی، زمانی که نظریه پیش فرض ما کلاسیک باشد از اصل طرد شق ثالث به دست خواهد آمد. و در مورد نظریه شهودی مجموعه ها با استفاده از $\Omega = \{\varnothing, 1\}$ فرمول $\forall x \in \Omega (x = \varnothing \vee x = 1)$ برقرار خواهد بود. بنابراین در این مورد برای نشان دادن یک به یکی $\ulcorner \bullet \urcorner$ کافیست نشان دهیم $\ulcorner 1 \urcorner \neq \ulcorner \varnothing \urcorner$. یعنی درستی و غلط کدهای متفاوتی داشته باشند.

۴.۲ قضایای ناتمامیت گودل

۱.۴.۲ قضیه‌ی اوّل ناتمامیت گودل

اکنون به قضایای گودل باز می‌گردیم. از این پس فرض خواهیم کرد که گردایه کدگذاری دارای نگاشت قطری d می‌باشد. قبلا دیدیم که هر خودریختی کدپذیر g روی Σ یک $\approx$-نقطه ثابت دارد. $\alpha \in \Sigma$ را که در $[g(x) \approx \alpha$ اگر و تنها اگر $x \approx \alpha]$ صدق کند، یک $\approx$-نقطه ثابت قوی برای خودریختی g می‌نامیم. به عبارت دیگر،

$$\alpha\text{، }\approx\text{-نقطه ثابت } g \text{ است هرگاه:} \qquad x \approx \alpha \longrightarrow g(x) \approx \alpha$$

$$\alpha\text{، }\approx\text{-نقطه ثابت قوی } g \text{ است هرگاه:} \qquad x \approx \alpha \longleftrightarrow g(x) \approx \alpha$$

اکنون می‌توانیم نسخه دیگری از لم نقطه ثابت را بیان کنیم.

لم ۱.۴.۲ (لم نقطه ثابت قوی). *فرض کنید f یک خودریختی کدپذیر حافظ $\approx$ روی Σ با $\approx$-نقطه ثابت قوی α باشد. در این صورت برای هر نگاشت منطقی ρ روی Σ عضو $\beta \in \Sigma$ وجود دارد که:*

$$\rho(\beta) \approx \alpha \longleftrightarrow \beta \approx \alpha$$

برهان. با استفاده از لم نقطه ثابت (۶.۲.۲)، $f \circ \rho$ دارای $\approx$-نقطه ثابت β است، بنابراین با توجه به تعریف $\approx$-نقطه ثابت قوی داریم: $\rho(\beta) \approx \alpha \longleftrightarrow f(\rho(\beta)) \approx \alpha \longleftrightarrow \beta \approx \alpha$. ⊞

اکنون می‌توانیم اولین قضیه ناتمامیت گودل را با تنظیمات اخیر صوری کنیم. در اینجا نیاز داریم که Σ عضو متمایز $\top$ را داشته باشد؛ $\top$ را به عنوان بیانگر جملات اثبات‌پذیر در نظر می‌گیریم، به این معنی که جملات اثبات‌پذیر در واقع جملات هم‌ارز با $\top$ تحت رابطه $\approx$ می‌باشند. بنابراین برای $\alpha \in \Sigma$، هم‌ارزی $\alpha \approx \top$ یعنی اینکه α اثبات‌پذیر است. فرض کنید یک نگاشت حافظ تساوی $\pi \in \mathrm{K}$ که نگاشت اثبات‌پذیری نامیده می‌شود، داده شده است با این خاصیت که برای هر $\omega \in \Sigma$، عضو $\pi(\ulcorner\omega\urcorner)$ از Σ به عنوان جمله‌ای تعبیر می‌شود که بیان می‌دارد «ω اثبات‌پذیر است». اکنون g را خودریختی القا شده توسط π روی Σ در نظر بگیرید (لزوماً کدپذیر و حافظ $\approx$ است). g را نگاشت گودل می‌نامیم در صورتی‌که $\top$ را به عنوان $\approx$-نقطه ثابت قوی داشته باشد. اگر g نگاشت

گودل باشد، در این صورت نگاشت اثبات‌پذیری π در رابطه $[\top \approx \pi(\ulcorner\omega\urcorner)$ اگر و تنها اگر $\omega \approx \top]$ صدق می‌کند و این به نحوی می‌تواند بیانگر این باشد که:

> جمله‌ی ω اثبات‌پذیر است اگر و تنها اگر جمله‌ی $\pi(\ulcorner\omega\urcorner)$ که بیان می‌کند «ω اثبات‌پذیر است» خودش اثبات‌پذیر باشد.

به یاد داشته باشید که خودریختی تولید شده روی Σ به وسیله یک نگاشت تارسکی، یک نگاشت گودل است. یک گردایه کدگذاری را گودلی نامیم هرگاه یک نگاشت گودل داشته و دارای عضوی مانند $\bot \in \Sigma$ باشد که $\top \not\approx \bot$ و نگاشت منطقی υ روی Σ طوری است که $\bot \approx \upsilon(\top)$ و $\top \approx \upsilon(\bot)$. υ را به عنوان عملگر نقیض روی جملات و $\bot$ را به‌عنوان جمله ردشدنی تعبیر می‌کنیم.

قضیه ۲.۴.۲ (قضیه اول ناتمامیت گودل). *مجموعه‌ی گزاره‌های هر گردایه کدگذاری گودل حداقل سه عضو دارد.*

برهان. وجود گردایه کدگذاری گودلی با عضو $\beta \in \Sigma$ به طوری که
$\top \approx \beta$ اگر و تنها اگر $\top \approx \upsilon(\beta)$،

از لم نقطه ثابت قوی (۱.۴.۲) به دست می‌آید. در این مورد $\top \not\approx \beta$ و $\bot \not\approx \beta$. لذا Ω حداقل سه عضو متمایز $[\![\top]\!]$، $[\![\bot]\!]$ و $[\![\beta]\!]$ را دارد. ⊞

عضو $\beta \in \Sigma$ که متمایز از $\top$ و $\bot$ است، به عنوان جمله تصمیم‌ناپذیر تعبیر می‌شود. لذا قضیه فوق اثبات می‌کند که هر گردایه کدگذاری گودلی شامل جمله‌های تصمیم‌ناپذیر است. در حالت خاص این نتیجه برای گردایه کدگذاری $\mathcal{P}$ نیز برقرار می‌باشد. برای نظریه حسابی T سازگار شامل PA قرار دهید Ω برابر مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی $\sim$ باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \varphi \sim \psi.$$

در این صورت داریم:

$$[\top]_\sim = \{\theta \mid T \vdash \theta\} \qquad \text{و} \qquad [\bot]_\sim = \{\theta \mid T \vdash \neg\theta\}.$$

پس عضو $\beta \notin [\top]_\sim, [\bot]_\sim$ دارای این خاصیت است که $T \nvdash \beta, \neg\beta$.

۲.۴.۲ قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل

در گردایه کدگذاری $\mathcal{P}$ فرض می‌کنیم $\top$ جمله $0 = 0$ و $\perp$ جمله $1 = 0$ بوده و Prov محمول اثبات‌پذیری برای PA باشد. در این صورت بنابر استدلال استاندارد [←[۶] فصل ۱۶]، برای هر دو جمله‌ی حسابی φ و ψ داریم:

(P_1) $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Prov}(\#\varphi)$ اگر و تنها اگر $\mathrm{PA} \vdash \varphi$.

$$(P_2)\quad \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Prov}(\#(\varphi \to \psi)) \to [\mathrm{Prov}(\#\varphi) \to \mathrm{Prov}((\#\psi)]$$

$$(P_3)\quad \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Prov}(\#\varphi) \to \mathrm{Prov}(\mathrm{Prov}(\#\varphi))$$

اگر $\pi : \mathbb{N} \to \Sigma$ نگاشتی با ضابطه $n \mapsto \mathrm{Prov}(\underline{n})$ باشد با استفاده از (P_2) نتیجه می‌شود که π حافظ تساوی است و با استفاده از (P_1) نگاشت $g : \Sigma \to \Sigma$ که نگاشت القایی توسط π می‌باشد، $\top$ را به عنوان $\approx$-نقطه ثابت قوی دارد. به عبارت دیگر g یک نگاشت گودلی برای $\mathcal{P}$ است (Prov نمایشگر کدگذار g است). فرض کنید PA سازگار، $\mathcal{P}$ گودلی و شامل گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر باشد. اکنون می‌توانیم قضیه دوم ناتمامیت گودل را در چهارچوب اخیر صوری کنیم. به این منظور لازم است مفهوم HBL- نگاشت[۴] را معرفی کنیم. فرض کنید $\mathcal{A}$ گردایه کدگذاری است که Ω جبر هیتینگ می‌باشد. یک HBL-نگاشت در $\mathcal{A}$، نگاشت $\chi \in \mathrm{K}$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$(i)\quad \chi(\ulcorner 1 \urcorner) = 1$$

$$(ii)\quad \chi(\ulcorner \omega \Rightarrow \omega' \urcorner) \leq (\chi(\ulcorner \omega \urcorner) \Rightarrow \chi(\ulcorner \omega' \urcorner))$$

$$(iii)\quad \chi(\ulcorner \omega \urcorner) \leq \chi(\ulcorner \chi(\ulcorner \omega \urcorner) \urcorner)$$

اگر χ یک HBL-نگاشت باشد، خودریختی کدپذیر $\Box$ القا شده توسط χ روی Ω، در سه شرط زیر صدق می‌کند:

$$(a)\quad \Box 1 = 1$$

[۴] Hilbert-Bernays-Löb

(b) $\Box(\omega \Rightarrow \omega') \leq (\Box\omega \Rightarrow \Box\omega')$

(c) $\Box\omega \leq \Box\Box\omega$

نگاشت $\Box$، HBL-عملگر وابسته به χ روی Ω نامیده می‌شود و به عنوان یک عملگر موجهی در اصول K۴ صدق می‌کند. از (a) و (b) نتیجه می‌شود که $\Box$، حافظ $\wedge$ بوده و لذا حافظ ترتیب است.

اگر χ را به عنوان نگاشت اثبات‌پذیری تعبیر کنیم، نگاشت $\Box$ به عنوان عملگر اثبات‌پذیری روی گزاره‌ها تعبیر خواهد شد. برای هر گزاره‌ی ω، $\Box\omega$ گزاره‌ای است که می‌گوید «ω اثبات پذیر است» و $\neg\Box\omega$ گزاره‌ای است که می‌گوید «ω اثبات‌ناپذیر است». لذا می‌توانیم شرایط (a) تا (c) را چنین بیان کنیم:

(a) اگر ω یک گزاره‌ی اثبات‌پذیر باشد، گزاره «ω اثبات پذیر است» نیز اثبات‌پذیر است.

(b) گزاره‌ی «ω آنگاه ω'، اثبات‌پذیر است»، گزاره‌ی««ω اثبات‌پذیر است» آنگاه «ω' اثبات‌پذیر است»» را نتیجه می‌دهد.

(c) گزاره‌ی «ωاثبات‌پذیر است» گزاره‌ی ««ωاثبات‌پذیر است» اثبات‌پذیر است» را نتیجه می‌دهد.

همچنین به یاد داشته باشید زمانی‌که 0 بیانگر گزاره نادرست است، $\neg\Box 0$ می‌تواند بیانگر گزاره‌ی سازگاری و $\Box 0$ بیانگر گزاره‌ی ناسازگاری باشد.

تعریف ۳.۴.۲. گردایه کدگذاری A را یک گردایه کدگذاری مناسب (جهت اثبات قضیه دوم ناتمامیت گودل) می‌نامیم هرگاه:

(i) Ω یک جبرهیتینگ مجهز به یک HBL-عملگر باشد،

(ii) به ازای هر $\alpha \in \Omega$ نگاشت $\Omega \to \Omega : (\Box x \Rightarrow \alpha) \mapsto x$ کدپذیر باشد. ◎

اکنون می‌توانیم حالتی از قضیه لوب را اثبات کنیم.

قضیه ۴.۴.۲ (قضیه لوب). *فرض کنید A یک گردایه کدگذاری مناسب با HBL- عملگر $\Box$ باشد. در این صورت برای هر $\alpha \in \Omega$ داریم:*

(i) $\Box(\Box\alpha \Rightarrow \alpha) \leq \Box\alpha$

$\Box\alpha \leq \alpha \longrightarrow \alpha = 1$ (ii)

برهان. فرض کنید $\alpha \in \Omega$ و تابع $f : \Omega \to \Omega$ با ضابطه $f(\omega) = (\Box\omega \Rightarrow \alpha)$ باشد. به وضوح f کدپذیر بوده و از لم نقطه ثابت (۶.۲.۲) دارای نقطه ثابت β است به طوری که

$$\beta = (\Box\beta \Rightarrow \alpha). \tag{۲.۲}$$

از آنجا که $\beta \leq (\Box\beta \Rightarrow \alpha)$، داریم $\Box\beta \leq \Box(\Box\beta \Rightarrow \alpha) \leq (\Box\Box\beta \Rightarrow \Box\alpha)$.
بنابراین

$$\Box\beta = \Box\beta \wedge \Box\Box\beta \leq \Box\alpha. \tag{۳.۲}$$

پس $(\Box\alpha \Rightarrow \alpha) \leq (\Box\beta \Rightarrow \alpha)$ و از آنجایی که

$$\begin{aligned} \Box(\Box\alpha \Rightarrow \alpha) &\leq \Box(\Box\beta \Rightarrow \alpha) \\ &= \Box\beta \qquad (\text{با استفاده از (۲.۲)}) \\ &\leq \Box\alpha \qquad (\text{با استفاده از (۳.۲)}) \end{aligned}$$

قسمت (i) اثبات می‌شود.
برای اثبات قسمت (ii)، فرض کنید $\Box\alpha \leq \alpha$. بنابراین $1 = (\Box\alpha \Rightarrow \alpha)$. اکنون از (i) نتیجه می‌شود که $1 = \Box1 = \Box(\Box\alpha \Rightarrow \alpha) \leq \Box\alpha$. بنابراین $\Box\alpha = 1$ و چون $\Box\alpha \leq \alpha$، پس $\alpha = 1$ ثابت می‌شود. ⊞

نتیجه ۵.۴.۲. *فرض کنید $\mathcal{A}$ گردایه کدگذاری مناسب با HBL-عملگر $\Box$ باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادل می‌باشند:*

$\forall x(x \leq \neg\neg\Box x)$ (i) $\qquad$ $\forall x(\neg\Box x = 0)$ (ii) $\qquad$ $\neg\Box 0 = 0$ (iii)

از فرض (i) یعنی $\forall x(x \leq \neg\neg\Box x)$ در منطق کلاسیک $\forall x(x \leq \Box x)$ نتیجه می‌شود که این به نوبه خود $\neg\Box 0 = 0$ را نتیجه می‌دهد.

برهان. $(i) \leftarrow (ii)$: فرض می‌کنیم $\forall x(x \leq \neg\neg\Box x)$ برقرار باشد، در این صورت با جایگذاری $\neg\Box x$ به جای x، خواهیم داشت:

$$\neg\Box x \leq \neg\neg\Box\neg\Box x \tag{۴.۲}$$

اکنون با استفاده از قضیه لوب داریم $\Box x \leq (x \Rightarrow \Box x)\Box \leq (0 \Rightarrow \Box x)\Box = \Box x \neg\Box$، بنابراین

$$\neg\Box x \leq \neg\Box\neg\Box x \tag{۵.۲}$$

و سرانجام از (۴.۲) و (۵.۲) به دست می‌آوریم: $0 = x\neg\Box\neg\Box \wedge x\neg\Box\neg\Box\neg\neg \leq x\Box\neg$.

$(ii) \leftarrow (iii)$: بدیهی است.

$(iii) \leftarrow (i)$: فرض کنید $0 = 0\Box\neg$، در این صورت به ازای هر x خواهیم داشت:

$$x \leq 1 = \neg\neg\Box 0 \leq \neg\neg\Box x$$

و به این ترتیب برهان تمام می‌شود. ⊞

نتیجه ۶.۴.۲. *فرض کنید A گردایه کدگذاری مناسب با HBL-عملگر $\Box$ باشد، در این صورت $0\Box\neg$ تنها نقطه ثابت نگاشت $x \mapsto \neg\Box x$ می‌باشد.*

برهان. با استفاده از قضیه لوب $\Box 0 \leq (0 \Rightarrow \Box 0)\Box = 0\Box\neg\Box$ برقرار می‌باشد، در این صورت

$$.\neg\Box 0 \leq \neg\Box\neg\Box 0 \tag{۶.۲}$$

از سوی دیگر $0\Box\neg\Box \leq 0\Box$ است و لذا داریم $.\neg\Box\neg\Box 0 \leq \neg\Box 0$ (۷.۲)

اکنون با استفاده از (۶.۲) و (۷.۲) نتیجه می‌شود که $0\Box\neg = 0\Box\neg\Box\neg$، یعنی $0\Box\neg$ یک نقطه ثابت نگاشت $x \mapsto \neg\Box x$ می‌باشد. برای نشان دادن یکتایی $0\Box\neg$، فرض می‌کنیم $\alpha = \neg\Box\alpha$، در این صورت:

$$\alpha = \neg\Box\alpha \leq \neg\Box 0 \tag{۸.۲}$$

همچنین $\alpha\neg = \alpha\Box\neg\neg \leq \alpha\Box$، بنابراین $\alpha\neg\Box \leq \alpha\Box\Box \leq \alpha\Box$ و از آنجا که

$$\Box\alpha \leq \Box\alpha \wedge \Box\neg\alpha = \Box(\alpha \wedge \neg\alpha) = \Box 0$$

بنابراین $\alpha\Box\neg \leq 0\Box\neg$، که با استفاده از (۸.۲)، $0\Box\neg = \alpha\Box\neg = \alpha$ را نتیجه می‌دهد. ⊞

تبصره ۷.۴.۲. *(۱) از قسمت (i) قضیه لوب (۴.۴.۲) می‌بینیم که $\Box$ در چیزی که اصل GL (گودل-لوب) برای منطق موجهات نرمال نامیده می‌شود، صدق می‌کند:*

$$\Box(\Box A \to A) \longrightarrow \Box A$$

(۲) *اگر $\Box$ نگاشت همانی باشد در این صورت از قسمت (ii) قضیه لوب (۴.۴.۲) نتیجه می‌شود که Ω فقط یک عضو دارد. این حقیقت در واقع یک نتیجه از قضیه تارسکی است:*

اگر $\Box$ همانی باشد، در این‌صورت χ یک نگاشت تارسکی است که فقط زمانی می‌تواند وجود داشته باشد که Ω فقط یک عضو دارد. به عبارت دیگر، درستی در یک سیستم زمانی تعریف‌پذیر است که سیستم ناسازگار باشد.

(۳) *در (i) قرار می‌دهیم $\alpha = 0$. داریم: $\Box 0 \leq \Box(\Box 0 \Rightarrow 0) = \Box\neg\Box 0$. چون $\Box$ حافظ ترتیب است، داریم $\Box 0 \leq \Box\neg\Box 0$. بنابراین خواهیم داشت:*

$\Box 0 = \Box\neg\Box 0$ (a) و (b) $\neg\Box 0 = \neg\Box\neg\Box 0$.

(a) این‌طور بیان می‌دارد که: گزاره‌ای که ناسازگاری داخلی را بیان می‌کند معادل است با گزاره‌ای که اثبات‌پذیری سازگاری داخلی را بیان می‌کند و (b) این‌طور بیان می‌دارد که: گزاره‌ای که سازگاری داخلی را بیان می‌کند معادل است با گزاره‌ای که اثبات‌ناپذیری سازگاری داخلی را بیان می‌کند.

(۴) *تمام نقاط ثابت نگاشت $\omega \mapsto \neg\Box\omega$ را گزاره‌های گودلی نام‌گذاری می‌کنیم. گزاره‌های گودلی در واقع گزاره‌هایی‌اند که اثبات‌ناپذیری خودشان را بیان می‌کنند. قسمت (b) بیان می‌کند که $\neg\Box 0$، گزاره سازگاری داخلی، در واقع یک گزاره گودلی است و در حقیقت از نتیجه (۶.۴.۲) نتیجه می‌شود که $\neg\Box 0$ تنها گزاره‌ی گودلی است.* ◎

و سرانجام از قضیه لوب (۴.۴.۲) به دست می‌آوریم:

قضیه ۸.۴.۲ (قضیه دوم ناتمامیت گودل). *برای یک گردایه کدگذاری سازگار مناسب با یک HBL-عملگر $\Box$، داریم:* $\forall\alpha \in \Omega \quad \Box\alpha \neq 0$.
یا معادلاً $\neg\Box\alpha \neq 1$. *و در حالت خاص:* $\neg\Box 0 \neq 1$ *و معادلاً* $\Box 0 \neq 0$.

برهان. اگر $\Box\alpha = 0$، در این صورت $\Box 0 \leq \Box\alpha = 0$. بنابراین از قضیه لوب $1 = 0$ و این یعنی $\mathcal{A}$ ناسازگار است. ⊞

با فرض گردایه کدگذاری پئانو، Ω یک جبر هیتینگ است و برقراری شرایط P_{1-3} روی محمول اثبات‌پذیری نتیجه می‌دهد که خودریختی $\Box$ القا شده روی Ω به وسیله نگاشت گودلی g، یک HBL-عملگر می‌باشد. همچنین به راحتی می‌توان بررسی کرد که به ازای هر $\alpha \in \Omega$ نگاشت $\Omega \to \Omega : (\Box x \Rightarrow \alpha) \mapsfrom x$ کدپذیر است. بنابراین گردایه کدگذاری پئانو یک گردایه مناسب است پس قضیه دوم ناتمامیت در آن صدق می‌کند. با مدنظر قرار دادن $\Box$ به عنوان عملگر اثبات‌پذیری، $\neg\Box\alpha$ گزاره‌ی «α اثبات‌ناپذیر است» می‌شود، که در این صورت $\neg\Box\alpha = 1$ نتیجه می‌دهد «α اثبات‌ناپذیر است» اثبات‌پذیر است! بنابر قضیه دوم ناتمامیت در یک گردایه کدگذاری سازگار، گزاره‌ای وجود ندارد که بگوید اثبات‌ناپذیر، اثبات‌پذیر است. در حالت خاص، اثبات‌ناپذیری گزاره‌ی 0، اثبات‌ناپذیر است. گزاره « 0 اثبات‌ناپذیر است» به این معنی است که هیچ گزاره ردشدنی اثبات‌پذیر نیست. این گزاره در واقع تعبیر عبارت «$\mathcal{A}$ سازگار داخلی است» می‌باشد. این نام‌گذاری موجب می‌شود که قضیه دوم ناتمامیت شکل ملموس‌تری به خود بگیرد، به این شکل که هر گردایه کدگذاری مناسب سازگار، نمی‌تواند سازگاری داخلی خودش را اثبات کند. همه این‌ها به طور خاص در گردایه کدگذاری پئانو که شرایط مناسب را برای محمول اثبات‌پذیری Prov به عنوان HBL-نگاشت دارد، صدق می‌کنند. جدول زیر به وضوح ارتباط بین سازگاری داخلی و گزاره‌های هم‌ارز را بیان می‌کند:

گزاره	تعبیر
$\Box 0$	ناسازگاری داخلی
$\neg\Box 0$	سازگاری داخلی
$\neg\neg\Box 0$	ناسازگاری داخلی ضعیف
$\Box\neg\Box 0$	سازگاری داخلی اثبات پذیر
$\neg\Box\neg\Box 0$	سازگاری داخلی اثبات‌ناپذیر

در هر حالت، این ادعا که گزاره داده شده برابر عضو بالای Ω (1) است، با یک ادعا در مورد گردایه کدگذاری $\mathcal{A}$ متناظر است: برای مثال، $\Box 0 = 1$ با گزاره «$\mathcal{A}$ ناسازگار داخلی است» معادل می‌باشد و برای بقیه گزاره‌ها نیز به همین شکل تعابیر را خواهیم داشت. به همین منوال نامساوی

است، $(\neg\Box 0 \Rightarrow \neg\Box\neg\Box 0) = 1$ که معادل با نتیجه (۶.۴.۲) از قسمت (۶.۲) $\neg\Box 0 \le \neg\Box\neg\Box 0$ بیان می‌کند: در گردایه کدگذاری A سازگاری داخلی، اثبات‌ناپذیری سازگاری داخلی را نتیجه می‌دهد. این بیان یک خوانش داخلی از قضیه دوم ناتمامیت گودل است. به همین ترتیب نتیجه (۶.۴.۲) چنین بیان می‌کند که: «A سازگار داخلی است» تنها گزاره منحصربفردی است که معادل با اثبات‌ناپذیری خودش می‌باشد. نتیجه (۵.۴.۲) نیز چنین است که: اگر در یک گردایه کدگذاری هر گزاره اثبات‌پذیری خودش را نتیجه دهد، در این صورت گردایه کدگذاری ناسازگار داخلی ضعیف است. سرانجام مشاهده می‌کنید که سازگاری و سازگاری داخلی همسو با یکدیگر هستند. این حقیقت از آنجا ناشی می‌شود که HBL-عملگر $\Box$ را می‌توانیم همانی در نظر بگیریم، به عبارت دیگر هر گزاره در شرط داخلی «— اثبات‌پذیر است» می‌تواند صدق کند. این بیانگر آن است که سازگاری داخلی ارتباطی با سازگاری ندارد و به طور کلی‌تر، نگاشت اثبات‌پذیری با آنچه که در عالم واقع اثبات‌پذیر است تفاوت دارد.

فصل ۳

قضایای گودل، تارسکی و چرچ در ارتباط با پارادوکس دروغگو

۱.۳ مقدمه

این حقیقت که قضیه مشهور ناتمامیت گودل و الگوی اصلی تمامی پارادوکس‌های منطقی از جمله پارادوکس دروغگو، به صورت نزدیکی با هم ارتباط دارند، نه تنها شناخته شده است بلکه وجه مشترکی از دانسته‌های منطق‌دانان محسوب می‌شود. در واقع، تقریباً تمام بحث‌های صوری این قضیه [ناتمامیت گودل] کمابیش پلی بر این ارتباط می‌سازند. خود گودل در مقاله‌ی مشهور خود [۱۰] اشاره می‌کند که:

> «شباهتی بین این نتیجه و پارادوکس ریچارد به چشم می‌خورد، همچنین یک ارتباط نزدیک با پارادوکس دروغگو وجود دارد. از آنجایی که ... ما ... با گزاره‌هایی مواجه هستیم که اثبات‌ناپذیری خود را ادعا می‌کنند.»

با توجه به این حقیقت که وجود چنین ارتباطی کاملاً معمولی است، اما نقطه شگفت‌انگیز این است که خیلی کم می‌توان درباره ماهیت آن آموخت، مگر شاید وقتی متوجه این نکته شد که [این ارتباط] نوعی شباهت یا تناظر با پارادوکس‌های فوق‌الذکر داشته باشد.

در حقیقت ما در این پایان‌نامه سعی بر نشان دادن این خواهیم داشت که ایده عمومی نهفته در این سه قضیه که روی محدودیت داخلی سیستم استنتاج صوری تمرکز می‌کنند، می‌تواند به عنوان راه‌های متفاوت دیگری برای حل پارادوکس دروغگو درنظر گرفته شوند. به عبارت دقیق‌تر آشکار خواهد شد که یک خوانش صوری انتزاعی از پارادوکس دروغگو که می‌تواند از نسخه زبان عادی اصلی آن به طور مستقیم نتیجه شود، یک تعمیم مشترک احتمالی از (الف) هر دو خوانش نحوی و معنایی قضیه‌ی ناتمامیت گودل،(ب) قضیه تارسکی در مورد تعریف‌ناپذیری حقیقت و (پ) قضیه‌ی چرچ درباره‌ی تصمیم‌ناپذیری اثبات‌پذیری، باشد. ما احساس می‌کنیم که علاوه بر نتیجه آن، روند استنتاج فرم مجرد از چنین قضیه‌ی مهم ریاضی از یک عبارت زبان عادی به خودی خود جالب و روشنگر است. از طرف دیگر، بررسی‌های ما پرتوی نوری بر نقاط کوری خواهند افکند که فقط بر اساس پارادوکس دروغگو نمی‌توان آن محدودیت‌ها را مشاهده کرد. برای به دست آوردن حل صوری پارادوکس دروغگو و تعمیم معمول قضایای متناظرش، آن را گام به گام در چهار مرحله بازنویسی می‌کنیم. در گام اول به دنبال معادل زبان عادی هستیم که ساختار منطقی هم‌ارز پارادوکس را به وضوح نشان دهد. سپس این عبارت را به صورت مستقیم به یک عبارت در زبان صوری ترجمه می‌کنیم. در مرحله سوم به تجزیه و تحلیل نسخه صوری پارادوکس در زبان صوری می‌پردازیم که منجر به تعمیم طبیعی آن می‌شود. این نتیجه برای توضیح قضایای ریاضی در یک سیستم منطقی و روشن کردن ارتباط بین پارادوکس باستانی و بازتجسم مدرن آن استفاده می‌شود. با به‌کارگیری روش‌های ممکن جهت تعمیم نتایج خود، سرانجام محدودیت‌های این پروژه را که توسط پارادوکس دروغگو ایجاد شده آشکار خواهیم کرد.

۲.۳ پارادوکس‌ها

۱.۲.۳ پارادوکس دروغگو

پارادوکس دروغگو بر جمله

$$\text{«این جمله غلط است»} \tag{A}$$

استوار است که درست بودن آن منجر به نادرست بودن آن می‌شود و برعکس. یکی از تلاش‌های بی‌شمار برای رهایی از این پارادوکس ادعای غلط بودن ساختار نحوی جمله است، یعنی جمله مبتدا-خبری است در حالی که مبتدای واقعی ندارد. به وضوح برای اینکه یک عبارت اسمی نقش مبتدا در یک جمله بامعنی را بازی کند، آن عبارت اسمی باید یک شی زبان‌شناختی کامل باشد. اما در مورد دروغگو، عبارت اسمی مورد نظر خود جمله است و این نیازمندی به مبتدا فقط در حالت اصلی این نکته آشکار می‌شود. طبق این انتقاد، جمله بدون مبتدای واقعی پارادوکسی را ایجاد نمی‌کند، بلکه به صورت خیلی ساده‌تر بی‌معنی است، یعنی نمی‌تواند توضیح هیچ جمله‌ای را بیان کند. بنابر گفته‌ی رایل [۱۷]:

«اگر این ادعا را تشریح کنیم، جمله‌ی فوق به این صورت خواهد بود:
و حکم موجود { یعنی حکم موجود [یعنی حکم موجود (یعنی حکم موجود . . .
نمادهای باز شده هیچ‌گاه بسته نخواهند شد و به فعلی نیز نخواهیم رسید.
لذا درستی یا غلط بودن را نمی‌توانیم ادعا کنیم.»

هدف از این تجزیه و تحلیل از دیدگاه ما واضح است و آن توضیحی است بر این مطلب که، اصلی که نقش کلیدی ایفا می‌کند، معنای صفت تشریحی «این» است، یعنی پارادوکس فوق برای یک صوری‌سازی درست، ایده‌آل نیست. بنابراین در یک سیستم صوری، کارکرد و معنای یک جمله باید منحصراً وابسته به شکل آن باشد. از آنجایی که هدف ما یافتن هم‌ارز دروغگو در زبان طبیعی است که بتوانیم آن را مستقیم صوری کنیم، پس بایستی این مطلب را تصریح کنیم که این پارادوکس بر خودارجاعی استوار است. شایان ذکر است که هدف ما بررسی این پرسش نیست که طرح ما چه اندازه می‌تواند به حل فلسفی مسئله مربوط به پارادوکس دروغگو کمک کند، تنها چیزی که ما ادعا می‌کنیم این است که این طرح ما را یک قدم به سمت صوری سازی ممکن از پارادوکس نزدیکتر می‌کند. برای این کار از تجزیه و تحلیل پارادوکس دیگری که از یک زبان، که درباره‌ی خود ساخته شده است، کمک می‌گیریم.

۲.۲.۳ پارادوکس کواین

پارادوکسی که مفاهیم را به زبانی که ما می‌توانیم در آن جمله دروغگو را صوری کنیم، توسط گرلینگ ابداع شد. صفتی را خودمصداق نامیم هرگاه خاصیت نشانگرش را دارا باشد، نقطه مقابل این صفت را خودنامصداق می‌نامیم، یعنی هرگاه خاصیت نشانگرش را دارا نباشد. به عنوان مثال، «کوتاه»، «پارسی» و «چند بخشی»، خودمصداق می‌باشند و کلمات «آلمانی»، «تک بخشی» و «جزئی»، خودنامصداق‌اند. نکته واضح در مورد خودنامصداق این است که فقط زمانی درست است که در مورد خودش نادرست باشد. این حقیقت می‌تواند در مورد صوری‌سازی یک جمله با ذات پارادوکسی همانند دروغگو استفاده شود:

«خود نامصداق» خود نامصداق است. (B)

این جمله‌ی متناقض‌نما (B) برخلاف پارادوکس دروغگو در مقابل نقد ادبی مصون است زیرا دارای یک مبتدای واقعی است، البته به طور عمیقی روی معنای تکنیکی عبارت به‌کار رفته درون خود تکیه دارد. به عبارت دیگر، برای داشتن یک جمله مستقل، عبارت «خود نامصداق» بایستی حذف گردد. با توجه به تعریف «خود نامصداق» به معنی «مستلزم تناقض است هرگاه در مورد خود به‌کار رود»، داریم:

«مستلزم تناقض است هرگاه در مورد خود به‌کار رود» (C)
مستلزم تناقض است هرگاه در مورد خود به‌کار رود.

به عبارت دیگر، جمله (C) بیان می‌دارد که عبارت «در مورد خود به‌کار می‌رود» را می‌توان – حداقل در این مورد خاص– معادل با «به نقل قول خود ملحق می‌شود» در نظر گرفت، یعنی:

«در مورد خود به‌کار می‌رود» معادل است با «به نقل قول خود ملحق می‌شود» (D)

که منجر به شاهکار گرلینگ از پارادوکس دروغگو (پارادوکس کواین) می‌شود:

«به تناقض منجر می‌شود هرگاه به آخر نقل قول خودش الحاق شود»
به تناقض منجر می‌شود هرگاه به آخر نقل قول خودش الحاق شود.

یادداشت ۱. ممکن است سردرگمی کمی در مورد طبیعت پارادوکسی این جمله به‌وجود آید و شخصی اصرار کند که این جمله در واقع بایستی همواره غلط باشد! شخص می‌تواند اینگونه ادعا کند که برخلاف پارادوکس دروغگو که تنها دروغ بودن خودش را ادعا می‌کند و چیز دیگری نمی‌گوید، پارادوکس کواین می‌تواند به‌صورت عطف دو ادعا تعبیر شود. در ادعای اول دروغ بودن خودش را ابراز می‌دارد و در وهله دوم ادعا می‌کند که پارادوکس کواین موضوع جمله‌ای است که دروغ بودن خودش را به‌دست می‌دهد ($\neg p \wedge p$). از آنجایی که این ترکیب عطفی نمی‌تواند درست باشد (لزوماً همواره غلط است)، بنابراین اولین عملوند آن درست بوده و لذا عملوند دوم بایستی غلط باشد. ◎

کاربرد صفت (عبارت وصفی) در زبان ممکن است با افزودن صفت (عبارت وصفی) برای یک اسم باشد که ممکن است چندین صفت را نیز هم‌زمان به کار بریم. از آنجایی که پارادوکس کواین با این ویژگی زبان رفتار می‌کند، نمی‌تواند ساختار منطقی خود، یعنی چیزی که ما واقعاً بدان نیاز داریم را نشان دهد. برای نیل به هدف خود بایستی به روش «مستقل از زبان» نظری افکنیم که برای صفت یک شیٔ به کار برده می‌شود.

۳.۲.۳ پارادوکس فیندلی

تقریباً هر زبانی و نیز قسمت عمده‌ای از سیستم‌های منطقی معمول مجهز به ابزار صوری جایگزینی برای بررسی کاربرد صفت (عبارت وصفی) برای یک شیٔ می‌باشند. پس اکنون به هر صفتی (عبارت وصفی)، جمله‌ای را وابسته می‌کنیم که ادعا می‌کند شیٔ ارجاع داده شده با قسمت اصلی نامعین آن جمله (که به طور معمول با یک حرف تنها نشان داده می‌شود و در منطق متغیر نامیده می‌شود)، دارای خاصیت بیان شده توسط صفت یا عبارت وصفی (اصطلاح قیدی) می‌باشد.[۱] با ارائه چنین جمله‌ای می‌توانیم کاربرد صفت (عبارت وصفی) برای یک شیٔ را با جایگزینی اسم به جای شیٔ برای متغیر در جمله نشان دهیم. جایگزینی، عملی صوری و به طور کلی «ناوابسته‌ی زبانی» است. یعنی نتیجه این گزاره بیان می‌کند که عمل جایگزینی وابسته به ساختار خاصی از جمله که در مورد آن

[۱] این حقیقت که ما کلمه «جمله» را برای عبارات زبانی که شامل متغیرهایی هستند نیز به‌کار می‌بریم، نمی‌بایست موجب سردرگمی شود. حال اگر بر این تاکید کنیم که جمله مورد نظر شامل یک متغیر است در این صورت از این حقیقت بهره گرفته‌ایم.

عمل جایگزینی به کار برده می‌شود، نیست. پس می‌توان مفهوم خودارجاعی را با اصطلاحات مجرد و ناوابسته‌ی زبانی توصیف کرد، به‌این‌شکل که معادل‌سازی در (D) با جایگزینی مناسبی به صورت زیر تغییر می‌یابد (با استفاده از این حقیقت که قرار دادن یک شئ زبان در بین علائم « » فقط یک راه نامگذاری آن است).[۲]

«در مورد خود به‌کار می‌رود» هم‌ارز است با «اسم، جایگزین متغیر درون آن می‌شود». (E)

اما پذیرفتن این تفسیر نتایج منحصر به خود را دارد، نتیجه‌ای که نشان می‌دهد یک شئ زبان، برای این که به صورت بامعنی برای خودش به‌کار رود، بایستی دارای متغیر واحد باشد، لذا بایستی این مفهوم از خودنامصداق را تصحیح کنیم. شایان ذکر است که بدون این اصلاح، پارادوکس گرلینگ که بر پایه طبیعت پارادوکسی یک صفت است نمی‌تواند یک صوری سازی وفادار از پارادوکس دروغگو را ارائه دهد. یعنی بایستی «یک جمله با متغیر واحد» (نه یک صفت یا عبارت وصفی) را برای خودنامصداق تعریف کنیم که اگر در مورد خود به‌کار رود منجر به یک جمله نادرست شود، یعنی با استفاده از (E) بایستی بگوییم:

جمله‌ای با متغیر واحد خودنامصداق است هرگاه هر جمله‌ی جدیدی که با جایگذاری اسم جمله در متغیر آن به دست می‌آید، نادرست باشد.

حال بایستی جمله متناظر (B) را بیابیم که نتیجه کاربرد این مفهوم جدید را در مورد خود بیان می‌کند. با توجه به اینکه جمله با متغیر واحد وابسته به صفت «خودنامصداق»، جمله‌ی «x خودنامصداق است» است، با استفاده از (E) جمله متناظر «خودکاربردی» از این صفت به این شکل است:

«x خودنامصداق است» خود نامصداق است. (F)

با استفاده از تعریف جدید بالا از خودنامصداق، «x خودنامصداق است» به شکل زیر در می‌آید:

«جمله جدید که با جایگذاری اسم
جمله جدید x برای متغیر درون آن به دست می‌آید نادرست است»

[۲] حالتهای دیگری برای جایگذاری با همین فواید وجود دارند ولی هیچ کدام از آن‌ها طبیعی به نظر نمی‌رسند و به‌صورت گسترده‌ای به جای هم استفاده شده‌اند [۲۱].

که با استفاده از (F) پارادوکس فیندلی[۳] را به دست می‌دهد:

جمله حاصل از جایگذاری اسم جمله «جمله حاصل از جایگذاری اسم جمله به جای متغیر درون آن نادرست است» به جای متغیر درون آن نادرست است.

به طور مستقیم می‌توان بررسی کرد که این جمله واقعاً در مورد خود سخن می‌گوید [که من نادرست هستم] (وچیزی دیگر نمی‌گوید) چون‌که این جمله چنان ساخته شده که اگر جایگزینی توصیف شده در خود جمله را انجام دهیم، خود همان جمله‌ای را به دست می‌آوریم که ادعا شده و نادرست است. علاوه بر آن، این یک جمله کاملاً «خوش ساخت» بوده و نهایتاً طبیعت پارادوکس آن به هیچ حقیقت زبان شناختی محتمل بستگی ندارد و نیز کاملاً «مستقل زبانی» بوده، یعنی می‌توان آن را فوراً به هر زبانی (چه صوری چه طبیعی) ترجمه کرد. پس بالاخره با داشتن یک نسخه از پارادوکس اصلی که در زبان عادی بی‌عیب و نقص بیان شده، می‌توانیم آن را به صورت مجرد در سیستم‌های منطقی زبان شناختی درج کنیم تا بتوانیم راه‌های ممکن برای حل آن را امتحان کنیم.

۳.۳ حل صوری پارادوکس‌ها

۱.۳.۳ سیستم مجرد اِسمولیَن

پارادوکس فیندلی از میان پارادوکس‌هایی که تاکنون توانستند صوری شوند، تنها پارادوکسی است که شامل حداقل نیازمندی‌های یک سیستم انتزاعی است. واضح است که چنین سیستمی بایستی شامل نسخه‌ی صوری از اعضای زبان طبیعی استفاده شده به منظور نوشتن پارادوکس باشد. به عبارت دیگر شامل نسخه صوری از یک رشته حروف (که آن‌ها را عبارت می‌نامیم) و آن دسته از جملات

[۳] فیندلی جملات با ساختار یکسانی را برای بررسی غیر صوری قضیه ناتمامیت گودل استفاده می‌کند [۹]. کواین هم جمله‌ای این چنین را در مرجع [۱۶] صفحه ۳۰۷ فرمول‌بندی می‌کند. هر دو نویسنده از مفهوم ناقضیه به جای غلط بودن استفاده کرده‌اند، زیرا با انجام کاری درست برعکس کاری که ما انجام داده‌ایم، آن‌ها به دنبال فرموله کردن زبان مشترکی از جمله صوری گودل بوده‌اند. با این حال بر ما روشن نیست که چگونه می‌توان جملاتی را که آن‌ها در نبود قرین زبان طبیعی از مفاهیم تکنیکی در مورد ناقضیه بودن به دست آورده‌اند را تحلیل کرد.

بامعنی که می‌توانند درست یا غلط باشند و جملاتی که یک متغیره هستند (در اصطلاح صوری، اعضای این دو مجموعه را فرمول می‌نامیم) باشد. علاوه بر آن، چنین سیستمی باید یک مجموعه از اشیایی را داشته باشد که نقش نام‌های اشیای زبان را بازی می‌کنند و نیز دو طرح جهت بیان نحوه نام‌گذاری آن نوع جایگزینی داشته باشد. نهایتاً، مفهوم درستی می‌تواند به وسیله مجموعه دلخواهی از جملات صوری شده بیان شود. فرض بر این خواهد بود که اعضای این مجموعه درست‌اند.

برای هر دو مجموعه‌ی X, Y و $Z \subseteq X$ و هر تابع $f : X \to Y$، تعریف می‌کنیم:

$$X - Y = \{x \in X : x \notin Y\} \qquad X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

$$f^*Z = \{y \in Y : \exists x \in Z \;\; f(x) = y\}.$$

اگر f یک‌به‌یک باشد، معکوس f به وسیله‌ی f^{-1} نمایش داده می‌شود. اکنون آماده‌ایم تا تعریفی ارائه دهیم که نسخه‌ی تعدیل شده از مفهوم ظاهر شده در منبع [۲۰] است.

تعریف ۳.۳.۱. $\mathcal{S} = \langle E, S, F, N, g, \sigma\rangle$ یک سیستم صوری مجرد است اگر:

(i) $\emptyset \neq S \subseteq F \subseteq E$ و N یک مجموعه دلخواه است که $F \cap N = \emptyset$. E مجموعه عبارات است و F، S و N به ترتیب مجموعه‌ای از فرمول‌ها، جملات صوری و اسامی صوری می‌باشند. اعضای $F - S$، فرمول‌های درست هستند. تعریف می‌کنیم $H^{\complement} = F - H$ برای هر $H \subseteq F$ و برای هر $X \subseteq N$ قرار می‌دهیم $X^{\complement} = N - X$.

(ii) g یک نگاشت یک‌به‌یک از F بتوی N است. g تابع نام‌گذاری $\mathcal{S}$ است.
برای هر زیرمجموعه از F، تصویر این زیرمجموعه تحت g را به وسیله‌ی قلم سیاه از حروفی که در زیرمجموعه‌ی مربوط تعریف شده بود، نمایش می‌دهیم. به طور مثال اگر $H \subseteq F$، در این صورت g^*H به وسیله $\mathbf{H}$ نمایش داده می‌شود. در آینده به حقیقت زیر نیاز پیدا خواهیم کرد: $\forall H \subseteq F: \quad g^*(H^{\complement}) = (g^*H)^{\complement} = \mathbf{H}^{\complement}.$

(iii) σ یک نگاشت از $F \times N$ به S است که آن را یک نگاشت جانشینی در $\mathcal{S}$ نامیم. تعریف می‌کنیم: $\forall \varphi \in F, n \in N: \quad \sigma(\varphi, n) = \varphi[n].$ ◎

اکنون سعی می‌کنیم نسخه‌ی صوری پارادوکس فیندلی را در S فرمول‌بندی کنیم. فرض کنید $T \subseteq S$ مجموعه‌ای دلخواه بوده و شامل همه‌ی جملات درست از S است. به عبارت دیگر، جملات بیرون از T غلط می‌باشند. به‌علاوه، در مورد هر جمله‌ی زبان معمولی σ که دارای یک متغیر است، نتیجه‌ی جایگذاری عبارت زبانی q به جای متغیر آن را به صورت خلاصه با $\sigma(q)$ نشان می‌دهیم. نام هر عبارت زبان معمولی مانند e را با $\ulcorner e \urcorner$ و عبارت «جمله‌ی جدید به دست آمده از جانشینی نام جمله‌ی x برای متغیر در آن، غلط است» را با p نشان می‌دهیم. حال، پارادوکس فیندلی به وسیله‌ی f چنین تعریف می‌شود:

$$f = p(\ulcorner p \urcorner) \qquad (۱.۳)$$

اکنون نام صوری فرمول x، $g(x)$ است و نتیجه‌ی جایگزینی این نام صوری در فرمول x، $x[g(x)]$ است. بنابراین $x[g(x)]$ نسخه‌ی صوری از عبارت «جمله‌ی جدید به دست آمده از جانشینی نام جمله‌ی x برای متغیر در آن» است. در نتیجه، با به کار بردن نمادگذاری تولید شده توسط S، p متناظر جمله‌ی زیر می‌شود که آن را با $\overline{p}$ نشان می‌دهیم:

$$x[g(x)] \notin T$$

لازم به ذکر است که عبارت فوق دارای یک متغیر است که این سبب می‌شود جمله یکتا نباشد. شیٔ مرتبط به آن ممکن است با نام جمله‌ای که برای این متغیر جایگزین می‌شود، تغییر کند. این خصوصیت نامعین، از نسخه‌ی صوری $x[g(x)]$ یا همان $\overline{p}$ که شامل نسخه‌ی صوری است، به دست می‌آید. بنابراین ما جمله‌ای بدون متغیر به دست آوردیم که تنها بعد از جایگزینی نام یک فرمول $\varphi \in F$ برای متغیر در $\overline{p}$، بتواند درست یا غلط باشد. اکنون، $\overline{p}$ به طور کلی یک عبارت وابسته به S نیست اما در مورد S به کار می‌رود. هنوز هم آن یک فرمول‌بندی زبان طبیعی از p در عبارت‌های سیستم صوری مجرد S است. از آنجایی که $\overline{p}$ در دامنه تابع نام‌گذاری g نیست لذا عضو مجموعه عبارت‌های S نبوده و به عنوان یک نام صوری محسوب نمی‌شود. بنابراین نسخه‌ی صوری $\ulcorner \overline{p} \urcorner$ وجود ندارد. در نتیجه، این نشان می‌دهد که ما نمی‌توانیم روند فرمول‌بندی خود را که در (۱.۳) بود، ادامه دهیم و با جایگذاری نام صوری برای متغیر در $\overline{p}$، نسخه‌ی صوری از f را به دست آوریم. لذا بایستی پارادوکس را در قالب صوری خود احیا کنیم.

۴.۳ پارادوکس دروغگوی صوری شده

محدودیتی که در مورد صوری کردن f در بخش قبل اشاره شد،از نقطه نظر مقابل می‌تواند به عنوان شرطی در نظر گرفته شود که تحت آن این روند واقعاً می‌تواند به سامان برسد[۴]. در واقع، گرچه $\overline{p}$ در S نیست، اما ممکن است اعضایی از S وجود داشته باشند که به طریقی می‌توانند بیانگر آن باشند و نقش $\overline{p}$ را در S بازی کنند. البته این اعضا، در برخی حالت‌ها، می‌توانند «بیانگر حالت مشترک از اعمال» به عنوان $\overline{p}$ باشند. حال فرض کنید $\overline{p}$ را یک فرمول با یک متغیر بنامیم، بنابراین آن نمی‌تواند درست یا غلط باشد. در واقع یک فرمول به دست آوردیم که تنها بعد از جایگزینی نام یک $\varphi \in F$ به جای متغیر در $\overline{p}$ ، یک ارزش درستی داشته باشد. آن عبارات صوری که این خاصیت را داشته باشند فقط فرمول‌های درست از S می‌باشند. لذا ما به دنبال یک فرمول همانند π، «با همان تاثیر» به عنوان $\overline{p}$ می‌گردیم که به وضوح به این معنی است که π و $\overline{p}$ بایستی در یک زمان درست باشند، به عبارت دیگر، هردو بایستی تنها برای فرمول‌های یکسان درست باشند و این بنابر تعریف $\overline{p}$ یعنی

برای هر $\varphi \in F$: $\quad \varphi[g(\varphi)] \notin T$ اگر و تنها اگر $\pi[g(\varphi)] \in T$،

یا معادلاً برای هر $n \in N$: $\quad g^{-1}(n)[n] \notin T$ اگر و تنها اگر $\pi[n] \in T$. (۲.۳)

بحث ما در بالا روشن می‌سازد که وجود چنین فرمولی یک سیستم صوری مجرد را در یک روش تضمین شده‌ی اصولی که شئ داده شده (مجموعه‌ای از فرمول‌هایی که در $\overline{p}$ صدق می‌کنند و اگر نام آن‌ها به جای متغیر در $\overline{p}$ جایگزین شود آن را درست می‌سازند) بتواند در داخل سیستم مورد بحث واقع شود، توصیف می‌کند. بنابراین، توسیع این خاصیت به هر مجموعه از اشیای مربوط، بیانگر قدرت بیان (یا چیزی که اغلب توانایی نامیده می‌شود) یک سیستم صوری است.

تعریف ۱.۴.۳. فرض کنید S یک سیستم صوری مجرد و $T \subseteq S$ و $X \subseteq N$ دلخواه باشند. گوییم X، T-نمایش‌پذیر (در S) است هرگاه $\varphi \in F$ وجود داشته باشد که برای هر $n \in N$

$n \in X$ اگر و تنها اگر $\varphi[n] \in T$.

فرمول φ را T-نمایشگر X (در S) نامیم. ◎

[۴] با این روش تارسکی اول به طور اصولمند حذف پارادوکس (سازگار نمودن سیستم) را امتحان نمود [۲۳].

حال اگر π، T-نمایشگر مجموعه‌ی $\{n \in N : g^{-1}(n)[n] \notin T\}$ باشد که شرط (۲.۳) را حفظ می‌کند، در این صورت می‌توانیم π را به عنوان نمایشگر $\overline{p}$ در S فرض کنیم. اما $\overline{p}$ تنها یک فرمول‌بندی از p در میان عبارت‌های S است که π می‌تواند به عنوان نسخه‌ی صوری از p فرض شود. این به این معنی است که می‌توانیم روند صوری‌سازی خود را به منظور یافتن نسخه‌ی صوری $f = p(\ulcorner p \urcorner)$ ادامه دهیم. در واقع، در این مورد، شیٔ صوری نسبت داده شده به $\ulcorner p \urcorner$، $g(\pi)$ است، بنابراین شیٔ نسبت داده شده به f، $\pi[g(\pi)]$ است. این جمله‌ی صوری که به پارادوکس فیندلی نسبت داده شده است، چیزی جز صوری سازی پارادوکس دروغگو نیست. در نتیجه ما نسخه‌ی صوری از پارادوکس دروغگو را به دست آوردیم. با توجه به مفاهیم فوق:

پارادوکس دروغگوی صوری شده، جمله‌ی صوری $\pi[g(\pi)]$ است.

مشابه شکل معادل غیر صوری‌اش، عبارت درست است اگر و تنها اگر غلط باشد و این گواهی است بر این حقیقت که فرمول πی موجود در آن نمی‌تواند وجود داشته باشد. بیان این خاصیت راه حلی برای پارادوکس ما در یک سیستم صوری ارائه می‌کند. برهان نیز صوری شده‌ای از بحث غیر صوری خواهد بود.

گزاره ۲.۴.۳ (قضیه دروغگو)**.** *فرض کنید S یک سیستم صوری مجرد و $T \subseteq S$ باشد. مجموعه‌ی $\{n \in N : g^{-1}(n)[n] \notin T\}$، T-نمایش‌پذیر نیست.*

برهان. فرض کنید (فرض خلف)، $\pi \in F$ وجود دارد به طوری که π، T-نمایشگر مجموعه‌ی $\{n \in N : g^{-1}(n)[n] \notin T\}$ است که در آن برای هر $n \in N$، $\pi[n] \in T$ اگر و تنها اگر $g^{-1}(n)[n] \notin T$. قرار می‌دهیم: $m = g(\pi)$ و $\lambda = \pi[g(\pi)]$. در این صورت $\lambda = \pi[g(\pi)] \in T$ اگر و تنها اگر $\pi[m] \in T$ اگر و تنها اگر $g^{-1}(m)[m] \notin T$ اگر و تنها اگر $g^{-1}(g(\pi))[g(\pi)] \notin T$ اگر و تنها اگر $\lambda = \pi[g(\pi)] \notin T$؛ و این تناقض است. ⊞

لذا در نهایت نسخه‌ی صوری از پارادوکس دروغگو را داریم. برای اینکه کاملاً صادق باشیم، پارادوکس در این شکل زیاد جالب نیست چون تعبیر عبارت‌های غیر صوری آسان نیست. یا به طور ساده، فهمیدن چیزی که پارادوکس در موردش سخن گفته، آسان نیست. برای درک ذات آن، بایستی آن را به وسیله‌ی نام‌گذاری مفهوم ابتدایی‌اش که در هسته همه‌ی تلاش‌ها نهفته است، شفاف کنیم.

۵.۳ تعمیم قضیه‌ی دروغگو

قضیه دروغگو به عنوان نسخه‌ای صوری از پارادوکس دروغگو امکان تجزیه دقیق مفاهیم به کار رفته در پارادوکس اصلی را فراهم می‌کند. قبل از بررسی این تجزیه و تحلیل به نکته مهم دیگری توجه می‌کنیم. در صوری کردن تعریف نمایش‌پذیری، ما از این مطلب استفاده کرده‌ایم که پاسخ پرسش اینکه آیا یک جمله داده شده رضایت‌بخش، قابل موافقت یا قابل قبول است، به درستی آن جمله بستگی دارد. از طرف دیگر، درستی یک جمله به معنای تناظری صریح یا کفایتی بین شرایط محیط و جمله در نظر گرفته شده است[۵]. تاکنون خوب پیش رفت. اینجا برای لحظه‌ای متوقف می‌شویم. درستی به هیچ معنایی تنها مفهوم متصل کننده‌ی حقایق به جملات توسط یک روش یا روشی دیگر نیست، پس تنها پایه برای صوری کردن تعریف نمایش‌پذیری نخواهد بود. در حقیقت، شاید راه‌های دیگر و معیار کفایت‌های دیگری به غیر از درستی وجود داشته باشند که کمابیش به صوری‌سازی منجر می‌شوند. کافی است به مفاهیم احتمال یا مورد تایید بودن، در حوزه‌های مختلف فکر کنیم. آنها به روشنی، مفاهیم ضعیفتری از حقیقت یا درستی هستند. در جهت دیگر، مفاهیم قوی‌تری وجود دارند که واضح‌ترین انتخاب آنها، البته، اثبات‌پذیری است. برای دقیق‌تر بودن، بهتر بود که در مورد اثبات‌پذیری به صورت جمع صحبت کنیم، یعنی در مورد اثبات‌پذیری‌ها صحبت کنیم، چون که به صورت خیلی طبیعی می‌توان مفاهیم مختلفی از اثبات‌پذیری را که می‌توانند بسط دهنده یا محدود کننده‌ی حلقه‌ی فهم ما از استنتاج‌های منطقی باشند، به عنوان برهان پذیرفت. ما در واقع برخی از این اصلاحات ممکن برای مفهوم به طور عام پذیرفته شده‌ی اثبات‌پذیری را در ادامه بررسی خواهیم کرد. به هرحال، طبیعی است که بحث را تعمیم دهیم تا شامل هرکدام از این معیارهای کفایت ممکن باشد و تعریف ما در بالا را به عنوان تنها تعریف نمایش‌پذیری در نظر نگیریم، بلکه فقط یکی از آن‌ها باشد. متناظراً، مجموعه‌های متفاوت از جملات صوری، بیانگر مجموعه‌هایی از جملات غیر صوری خواهند بود که شرایط کفایت ممکن متفاوتی را برآورده می‌کنند و تا اطلاع ثانوی هیچ معنی خاصی به آن‌ها متناظر نخواهد شد. به عنوان یادآوری از این حقیقت، تعریفمان از نمایش‌پذیری را با به کاربردن حرفی بدون بار معنایی (حذف مجموعه T)، تکرار می‌کنیم.

[۵] نتیجه این بحث غیر صوری مستقل از نظریه درستی است که می‌توان انتخاب نمود.

تعریف ۱.۵.۳. فرض کنید S یک سیستم صوری مجرد و $A \subseteq S$ و $X \subseteq N$ دلخواه باشند. گوییم X، A-نمایش‌پذیر (در S) است اگر $\varphi \in F$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \in N$،

$n \in X$ اگر و تنها اگر $\varphi[n] \in A$.

گوییم φ، A-نمایشگر X (در S) یا X، A-نمایش‌پذیر شده به وسیله‌ی φ است. ⊚

اکنون می‌توانیم به قضیه‌ی دروغگو بازگردیم. بدون شک، عبارت $g^{-1}(n)[n]$ همان چیزی است که ما را از تعبیر غیر صوری‌اش به یک روش قابل درک، منع می‌کند. به نظر می‌رسد که همه چیز بسیار ساده خواهد بود اگر بتوانیم از قید آن رها شویم. مطمئناً، نمی‌توانیم از توجه به آن به وسیله برخی روش‌ها بپرهیزیم. به این دلیل که $g^{-1}(n)[n]$ تنها نسخه‌ای صوری از جمله‌ی «جمله‌ی جدید به دست آمده به وسیله‌ی جایگزینی n در جمله‌ی نامگذاری شده به وسیله‌ی آن» است که بنابر (E)، صوری شده‌ای از عبارت «جمله‌ی جدید به دست آمده حاصل از جمله‌ی نام‌گذاری شده به وسیله‌ی n در خودش» است. به عبارت دیگر، $g^{-1}(n)[n]$ چیزی نیست جز فرمول‌بندی خود ارجاع و واضح است که به علت نقش مرکزی‌اش در پارادوکس، در هر فرمول‌بندی از پارادوکس دروغگو ظاهر خواهد شد، مگر اینکه ما خودمان را منحصر به سیستم صوری کنیم که بتواند آن را مهار کند. ما این روش را انجام خواهیم داد، به عبارت دیگر، تنها آن سیستم‌های صوری را امتحان می‌کنیم که شامل فرمول‌هایی‌اند که بایستی به صورت خودارجاعی در سیستم بیان شوند. مثال‌های بسیار ملموس از سیستم‌های صوری با این خاصیت همان سیستم‌های القا شده به‌وسیله زبان طبیعی هستند که به اندازه‌ای قوی می‌باشند که شامل عباراتی راجع به خود مفهوم خودارجاعی هستند [۹].

تعریف ۲.۵.۳. فرض کنید S یک سیستم صوری مجرد و $A \subseteq S$ باشد. اگر برای هر $X \subseteq N$، زمانی که X، A-نمایش‌پذیر باشد، آنگاه مجموعه $\{n \in N : g(g^{-1}(n)[n]) \in X\}$ نیز A-نمایش‌پذیر باشد، آنگاه S را یک خودارجاع وابسته به A نامیم. ⊚

خودارجاعی، شرایط صوری شده در لم نقطه ثابت از منطق ریاضی را حفظ می‌کند و نقش مرکزی را در محدودیت‌های سیستم صوری ایفا می‌کند. در ادامه خواهیم دید که خودارجاعی به عنوان یک شرط در هر جمله‌ی مرتبط با این محدودیت‌ها ظاهر می‌شود. به عبارت دیگر، بیشتر سیستم‌های صوری حساب، به واقع، خودارجاع هستند. با در دست داشتن مفهوم خودارجاعی، می‌توانیم آخرین

گام از روند صوری‌سازی را برداریم. با توجه به اینکه مجموعه‌ی T نقش دوگانه‌ای در قضیه‌ی دروغگو (۲.۴.۳) ایفا می‌کند، این اصلاح از قضیه‌ی دروغگو به همراه کاربرد خودارجاعی، نتیجه‌ی اصلی از تحقیقات ما را به دست می‌دهد. در حقیقت، قضیه‌ی زیر که نسخه‌ی توسیع یافته از پارادوکس دروغگو است، ارتباط اصلی بین پارادوکس اولیه و قضیه‌های درگیر محدودیت‌های استدلال صوری را بیان خواهد کرد.

قضیه ۳.۵.۳ (توسیع قضیه‌ی دروغگو). *فرض کنید S یک سیستم صوری مجرد و $A \subseteq F$ و $B \subseteq S$ و S خودارجاع نسبت به B و $\mathbf{A}^{\complement}$، B-نمایش‌پذیر باشد. در این صورت $\lambda \in S$ وجود دارد که: $\lambda \notin A$ اگر و تنها اگر $\lambda \in B$. و این نتیجه می‌دهد: $S \cap A \neq B$.*

برهان. از آنجایی که $\mathbf{A}^{\complement}$، B-نمایش‌پذیر و S خودارجاع نسبت به B است، پس مجموعه‌ی $\{n \in N : g(g^{-1}(n)[n]) \notin \mathbf{A}\}$ نیز B-نمایش‌پذیر است. که در این صورت $\pi \in F$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \in N$، $\pi[n] \in B$ اگر و تنها اگر $g(g^{-1}(n)[n]) \notin \mathbf{A}$. قرار دهید: $m = g(\pi)$ و $\lambda = \pi[g(\pi)]$. در این صورت، از یک طرف $\lambda \in S$ و از طرف دیگر $\lambda = \pi[g(\pi)] \in B$ اگر و تنها اگر $\pi[m] \in B$ اگر و تنها اگر $g(g^{-1}(m)[m]) \notin \mathbf{A}$ اگر و تنها اگر $g^{-1}(m)[m] \notin A$ اگر و تنها اگر $g^{-1}(g(\pi))[g(\pi)] \notin A$ اگر و تنها اگر $\lambda = \pi[g(\pi)] \notin A$. که در این صورت توانستیم یک $\lambda \in S$ بیابیم که $\lambda \in B$ اگر و تنها اگر $\lambda \notin A$. ⊞

البته با چنین لفظ‌گذاری انتزاعی، به نظر می‌رسد که این قضیه چیز زیادی در مورد سیستم صوری ریاضی مربوط، نمی‌گوید. قبل از به‌کاربردن این لفظ‌گذاری برای مفاهیم منطقی که اشیای معمول در پژوهش ریاضی ما می‌باشند، دوست داریم روشی را شرح دهیم که می‌تواند به وسیله‌ی کاربردش در مفاهیم اثبات‌پذیری در کمتر از یک تعداد گام محدود که معمولاً آزموده نشده است، استفاده شود. معنای شهودی این روش بسیار جالب است (نتایج مهمی مربوط به این مفهوم وجود دارند که شاید جالبترین آن‌ها آن دسته‌ای هستند که به نوعی بازگویی از حدس کرایسِل را بیان می‌کنند، زیرا این نتایج طبیعت حسابی ناتمامیت را روشن می‌سازند. حدس کرایسِل چنین ادعا می‌کند که در حساب پئانو اگر تمام مثال‌های عددی $\varphi(n)$ از یک فرمول به فرم $\varphi(x)$ اثبات‌پذیر باشند و یک کران بالا برای کوتاهترین اثبات $\varphi(n)$ به ازای هر n وجود داشته باشد، در این صورت جمله عمومی

$\forall x\varphi(x)$ نیز اثبات پذیر است. پاریخ، باز و پودلک نیز حدس کرایسِل را برای نسخه‌های متفاوت حساب اثبات کرده‌اند ([۲] و [۱۵]). به تقلید از سیستم ریاضی غیر صوری، می‌توانیم مجموعه‌ی جملات اثبات‌پذیر در یک سیستم صوری مجرد $\mathcal{D}$ را به شکل زیر تعریف کنیم. بعد از انتخاب یک مجموعه از جملاتی که اصول نامیده می‌شوند و یک مجموعه از قواعد جهت استنتاج یک مفهوم از یک مجموعه‌ی مفاهیم، یک برهان را به عنوان یک رشته متناهی از مفاهیمی تعریف می‌کنیم که هر مفهوم یک اصل بوده و یا به وسیله‌ی قواعد استنتاج از مفاهیم قبلی‌اش به دست می‌آید. یک جمله را اثبات‌پذیر یا یک قضیه گوییم هرگاه آخرین مفهوم از یک برهان باشد. اکنون، برای هر عدد صحیح مثبت n، مجموعه‌ی P_n را به عنوان مجموعه‌ی جملات اثبات‌پذیر در کمتر از n مرحله در نظر می‌گیریم. به‌علاوه، فرض کنید P مجموعه‌ی همه‌ی جملات اثبات‌پذیر از $\mathcal{D}$ باشد. به وضوح برای هر n، $P_n \subseteq P$، بنابراین اگر در توسیع قضیه‌ی دروغگو (۳.۵.۳) A و B را به عنوان P_n و P تعبیر کنیم، داریم:

گزاره ۴.۵.۳. *فرض کنید $\mathcal{D}$ نسبت به P خودارجاع باشد. برای هر عدد صحیح مثبت n، اگر $\mathbf{P_n^\complement}$، P-نمایش‌پذیر باشد، در این صورت* $P - P_n \neq \emptyset$.

یادداشت ۲. خودارجاعی را می‌توان به طور مستقیم بررسی کرد. در سیستم‌هایی که ما به آن‌ها علاقه‌مندیم تا جایی که به P-نمایش‌پذیری $\mathbf{P_n^\complement}$ مربوط می‌شود، برای هر n، P_n می‌تواند به عنوان مجموعه جملات آخر طرح‌های برهان‌های متناهی توصیف شود. در حقیقت اصول به عنوان مجموعه‌ای از طرح‌های فرمولی داده شده‌اند و نتیجه به‌کاربردن هر کدام از قاعده‌های استنتاجی متناهی روی یک مجموعه از طرح‌های فرمولی دوباره یک طرح فرمولی است. به دست آوردن فرمول P-نمایشگر متمم مجموعه‌ای که شامل اسامی فرمول‌های متعلق به یک مجموعه متناهی از طرح‌های فرمولی می‌باشد، به نوبه خود یک ساختار سرراست دارد. یک روش غیرمستقیم برای نشان دادن P-نمایش‌پذیری $\mathbf{P_n^\complement}$ با ارجاع به قضیه چرچ درباره معادل بودن همه فرمول‌بندی‌های مفهوم غیرصوری تصمیم‌پذیری وجود دارد. در واقع، از آنجا که P_n یک مجموعه متناهی از طرح‌های فرمولی می‌باشد این مسئله صرف نظر از اینکه نام فرمول داده شده در P_n باشد یا نه، تصمیم‌پذیر است. از سوی دیگر، یک فرمول‌بندی ممکن از این حقیقت، P-نمایش‌پذیری $\mathbf{P_n^\complement}$ را به عنوان یک شرط لازم دارا باشد. ◎

اثبات این حقیقت که اکثر سیستم‌های صوری شده‌ی حساب، شرط گزاره را برای هر عدد صحیح مثبت دارا می‌باشند، بسیار ساده است. با این حال، زیاد بودن محاسبات صوری برای تفسیر غیر تکنیکی ما [در یادداشت (۲) آورده شده است] مناسب نیست. و این بیانگر آن است که برای هر عدد صحیح n، هر اندازه هم بزرگ باشد، قضایایی در سیستم وجود دارند که نمی‌توانند در کمتر از n مرحله اثبات شوند، یعنی برهان‌های به دلخواه طولانی، قضایای جدیدی را اثبات می‌کنند. این نوعی بیان عملی از ناتمامیت است، چون وجود قضایایی را بیان می‌دارد که برهانشان نیازمند دوره‌ی طولانی از زمان است و در نتیجه، گرچه آن‌ها از نظر علمی اثبات‌پذیرند ولی هرگز اثبات نخواهند شد زیرا انسان زمان کافی برای اثبات آن‌ها نخواهد داشت. از بُعد دیگر، این خاصیت به طور رسمی بی‌کران بودن سیستم صوری مربوط را نشان می‌دهد، به این شکل که قضایایی وجود دارند که به دلخواه از اصول فاصله[۶] دارند و این توانگری و پیچیدگی و پایان‌ناپذیری سیستم صوری را ادعا می‌کند. اکنون به آن سیستم صوری مجردی بازمی‌گردیم که یک چهارچوب ادراکی برای پژوهش‌های نظری ما، از جنبه‌ی فعالیت‌های ریاضی را می‌دهد.

۶.۳ محدودیت‌های سیستم‌های منطقی

جهت استفاده از توسیع قضیه‌ی دروغگو، حداقل نیازمندی‌های متداولی را که منطق بایستی مطابق با آن باشد، فرمول‌بندی می‌کنیم. به وضوح، چنین سیستمی بایستی دارای دو مجموعه‌ی مشخص از جملاتی که به عنوان اثبات‌پذیری و جملات درست تعبیر می‌شوند، بوده و نیز قادر به تعبیر عملگر منطقی نقیض باشد. علاوه بر آن، نیازمند برخی مفاهیم برای تعریف خصوصیات پایه‌ای چنین سیستمی هستیم.

تعریف ۱.۶.۳. فرض کنید S یک سیستم صوری مجرد دلخواه باشد:

[۶] اینکه بگوییم دو جمله از هم دور هستند فراتر از یک اصطلاح عامیانه است. در واقع، تابعی که یک زوج مرتب از جملات را می‌گیرد و طول کوتاهترین استنتاج از جمله اول به جمله دوم را نسبت می‌دهد را می‌توان به عنوان یک مفهوم مستقل از فاصله دو کلمه در نظر گرفت که در یک فرم مشخص می‌تواند مفهوم فاصله را به مجموعه جملات توسیع دهد. به عبارت دیگر، چنین تابعی بایستی شرایط تابع فاصله بودن (بالاخص نامساوی مثلثی) در آنالیز را برآورده کند.

(i) فرض کنید $P, T \subseteq S$ دلخواه باشند. گوییم که $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, P, T, ')$ یک سیستم منطقی است هرگاه $'$ یک نگاشت از F به F باشد که:

$(a1)$ $\varphi' \in S$ اگر و تنها اگر $\varphi \in S$

$(a2)$ برای هر $n \in N$ و $\varphi \in S$: $\varphi' \notin T$ اگر و تنها اگر $\varphi \in T$

$(b1)$ $\varphi'[n] \notin T$ اگر و تنها اگر $\varphi[n] \in T$

$(b2)$ $\varphi''[n] \in P$ اگر و تنها اگر $\varphi[n] \in P$

$(b3)$ $(\varphi[n])' \in P$ اگر و تنها اگر $\varphi'[n] \in P$

P و T مجموعه‌هایی از اثبات‌پذیرها و جملات درست نامیده می‌شوند و φ' نقیض φ است.
اکنون نمادگذاری زیر را برای هر $H \subseteq F$ استفاده می‌کنیم: $H' = \{\varphi \in F : \varphi' \in H\}$.
(ii) فرض کنید $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, P, T, ')$ یک سیستم منطقی باشد:

(a) گوییم $\mathcal{L}$ سازگار است هرگاه $P \cap P' = \emptyset$؛ در غیر این صورت ناسازگار است.

(b) گوییم $\mathcal{L}$ تمام (کامل) است هرگاه $P \cup P' = S$؛ در غیر این صورت ناتمام است.

(c) گوییم $\mathcal{L}$ درست است هرگاه $P \subseteq T$. ◎

واضح است که سازگاری یکی از شرایطی است که هر سیستم منطقی معنی‌دار بایستی در آن صدق کند زیرا سازگاری به معنای این است که سیستم رها از تناقض است؛ برای هر جمله و نقیضش، حداکثر یکی از آن‌ها می‌تواند متعلق به مجموعه‌ی جملات اثبات‌پذیر باشد. به‌علاوه، مجموعه‌ی جملات اثبات‌پذیر بایستی طوری انتخاب شوند که سیستم درست بماند؛ فقط جملات درست اجازه داشته باشند اثبات شوند. به عبارت دیگر، دغدغه‌ی اصلی ما آزمودن تمامیت سیستم صوری است، بیشینگی که دوگان سازگاری است. در سیستم‌های تمام، برای یک جمله‌ی دلخواه و نقیضش، حداقل یکی از آن‌ها متعلق به مجموعه‌ی جملات اثبات‌پذیر است. اهمیت این مفهوم تاحدی از این حقیقت به دست می‌آید که چون همه‌ی سیستم‌های جالب درست هستند، هرکدام از آن‌ها کامل‌اند اگر و

تنها اگر $P = T$،[زیرا با فرض درستی، $P \neq T$ نتیجه می‌دهد که $\delta \notin P$ وجود دارد که $\delta \in T$ ($\delta' \notin T$) و این یعنی $\delta' \notin P$. از سوی دیگر بنابر تعریف داریم $T \cup T' = S$، بنابراین اگر $P = T$ آنگاه $P \cup P' = S$.] یعنی همه‌ی جملات درست، اثبات‌پذیرند.

اکنون بلافاصله از تعریف سازگاری و تمامیت نتیجه می‌شود که یک سیستم منطقی S کامل و سازگار است اگر و تنها اگر $S - P = P'$[7]. رابطه‌ی میان این معادله و توسیع قضیه‌ی دروغگو نیازمند هیچ توضیحی نیست، آن دو باهم یک نسخه‌ی مجرد از قضیه‌ی ناتمامیت گودل را می‌دهند، به این صورت که تحت شرایط مناسب مربوط به خودارجاعی و نمایش‌پذیری، سازگاری و تمامیت همدیگر را دفع می‌کنند. از طرفی، با محدود کردن خود در سیستم منطقی، توسیع قضیه‌ی دروغگو شکلی به خود می‌گیرد که نسخه‌ی انتزاعی از سه قضیه‌ی اساسی مرتبط با محدودیت‌های سیستم صوری را نتیجه می‌دهد. این حقیقت نشان‌دهنده‌ی این است که این قضیه‌ها بیان‌های متفاوتی از اصول منطقی یکسان می‌باشند[8].

قضیه ۲.۶.۳. *قرار دهید $\mathcal{L} = (S, P, T,')$ یک سیستم منطقی دلخواه باشد.*

(i) (a) *فرض کنید $\mathcal{L}$ خودارجاع نسبت به P و $\mathbf{P}$، P-نمایش‌پذیر باشد.*

اگر $\mathcal{L}$ سازگار باشد، در این صورت $\mathcal{L}$ ناتمام است.

(b) *فرض کنید $\mathcal{L}$ خودارجاع نسبت به T و $\mathbf{P}$، T-نمایش‌پذیر باشد.*

اگر $\mathcal{L}$ درست باشد، در این صورت $T - P \neq \emptyset$.

(ii) *فرض کنید که $\mathcal{L}$ خودارجاع نسبت به T باشد. در این صورت*

$\mathbf{T}$، T-نمایش‌پذیر نیست.

(iii) *فرض کنید که $\mathcal{L}$، خود ارجاع نسبت به P باشد. در این صورت*

[7] به عبارت دیگر می‌توان گفت $\{P, P'\}$ افرازی از S می‌باشند.

[8] اسمولین در مرجع [۲۰] در مورد نسخه انتزاعی از قضایای مرتبط با محدودیت‌های سیستم صوری مطالعاتی کرده است. جالب اینجاست که ظاهراً ایشان ساختار معمول منطقی آن‌ها را در نظر نگرفته است یا حداقل می‌توان گفت که برایش ارزش بررسی نداشته‌اند.

$\mathbf{P}^{\complement}$، P-نمایش‌پذیر نیست.

برهان. ابتدا جایگزینی‌هایی که جهت به دست آوردن شکل‌های متفاوت از توسیع قضیه‌ی دروغگو (۳.۵.۳) نیاز است را لیست می‌کنیم:

$$(i)\quad (a)\ A = P^{\complement},\quad B = P'$$

$$(b)\ A = P,\quad B = T$$

$$(ii)\ A = T,\quad B = T$$

$$(iii)\ A = P,\quad B = P$$

با وارد شدن به جزئیات، به طور مستقیم از تعریف به دست می‌آید که، برای هر مجموعه‌ی $C \subseteq S$، اگر $\mathbf{C}$، T-نمایش‌پذیر به وسیله‌ی $\varphi \in F$ باشد، در این صورت $\mathbf{C}^{\complement}$، T-نمایش‌پذیر به وسیله‌ی $\varphi' \in F$ است و اگر $\mathbf{C}$، P-نمایش‌پذیر به وسیله‌ی $\varphi \in F$ باشد، در این صورت $\mathbf{C}$، P'-نمایش‌پذیر به وسیله‌ی $\varphi' \in F$ است. به‌علاوه، خودارجاعی $\mathcal{S}$ نسبت به P، خودارجاعی‌اش نسبت به P' را می‌دهد. با استفاده از این حقیقت‌ها در جایی که نیاز است، داریم:

(i) (a) $\mathbf{P} = (\mathbf{P}^{\complement})^{\complement} = (g^*(P^{\complement}))^{\complement}$ و لذا از توسیع قضیه‌ی دروغگو داریم $S - P \neq P'$، که در واقع همان چیزی است که ما نیاز داریم زیرا $S - P \supseteq P'$ اگر و تنها اگر $\mathcal{S}$ سازگار باشد و $S - P \subseteq P'$ اگر و تنها اگر $\mathcal{S}$ تمام باشد.

(b) $\mathcal{S}$ درست است، بنابراین $P \subseteq T$ و بنابر توسیع قضیه‌ی دروغگو $P \neq T$.

(ii) از توسیع قضیه‌ی دروغگو، T-نمایش‌پذیری $\mathbf{T}^{\complement}$، $\mathbf{T} \neq T$ را نتیجه می‌دهد.

(iii) از توسیع قضیه‌ی دروغگو، P-نمایش‌پذیری $\mathbf{P}^{\complement}$، $\mathbf{P} \neq P$ را نتیجه می‌دهد. ⊞

جملات قضیه‌ی فوق می‌توانند به عنوان نسخه‌هایی از قضایای گودل، تارسکی و چرچ متناسب با یک سیستم منطقی انتزاعی، فرض شوند. در واقع، علاوه بر بخش اولیه که شامل نسخه‌ی نحوی و

معنایی انتزاعی از قضیه‌ی ناتمامیت گودل است، که به ترتیب رابطه‌ی بین اثبات‌پذیری و ردشدنی[۹] و بین اثبات پذیری و درستی را بیان می‌کند، دارای دومین و سومین بخش که یک تعمیم از قضیه‌ی تارسکی روی تعریف‌ناپذیری درستی[۱۰] و یک عبارت که می‌تواند به عنوان یک نسخه‌ی مجرد از قضیه‌ی چرچ درباره‌ی تصمیم‌ناپذیری اثبات پذیری در یک سیستم واحد تعبیر شود، است. علاوه بر آن، با اعطای هر نقش معقول برای توسیع قضیه‌ی دروغگو (۳.۵.۳)، برهانش نشان می‌دهد که قضایای گودل، تارسکی و چرچ تنها نتایج ممکن مربوط به اصطلاح درستی و اثبات‌پذیری‌اند که می‌توانند با فرمول‌بندی‌هایی از پارادوکس دروغگو، در چهارچوب ادراکی از منطق ریاضی قرار گیرند. این قضیه از یک جهت فراگیر است، زیرا شامل برخی نسخه‌های کلی از همه‌ی قضیه‌های اصلی شناخته شده‌ی مرتبط با درستی و اثبات‌پذیری (محدودیت‌های روش‌های استنتاجی) است، که می‌توانند در سطح مفهوم انتزاعی تعریف شده به وسیله‌ی صوری‌سازی زبان مورد استفاده در پارادوکس دروغگو[۱۱]، صوری شوند. این قضیه، سیستم ادراکی از این نتایج را بیان می‌کند که از یک طرف به وسیله‌ی قوانین عمومی منطق (نمایش داده شده بوسیله‌ی پارادوکس دروغگو) و از طرف دیگر به وسیله‌ی خصوصیات سیستم خاص مربوط، نقش‌های متفاوت ایفا شده را روشن می‌سازد. از این نظر کلی، ماهیت نتایج اولیه گودل روی ناتمامیت حساب صوری، در اثبات این حقیقت که شرایط قضیه‌ی مربوط به نمایش‌پذیری و خودارجاعی واقعاً در این مورد خاص حفظ شود، وجود دارد. بنابراین، قضیه می‌تواند در سیستم‌های منطقی حساب مورد استفاده قرار گیرد.

یادداشت ۳. یکی از کارهای هوشمندانه گودل که عدددهی گودلی نامیده شد روشی است که در

[۹] یک جمله را ردشدنی گوییم هرگاه نقیضش اثبات‌پذیر باشد. در حقیقت این گزاره یک نسخه انتزاعی پیشرفته‌تر از قضیه اصلی گودل است که توسط راسر صورت گرفته است [← [۱۱] صفحات ۵۴-۶۴ و [۱۳] صفحات ۱۴۵-۱۴۳]. شایان ذکر است که این جمله یک مفهوم کاملاً نحوی است که لزوماً ارتباطی با مفهوم درستی ندارد.

[۱۰] این نتیجه به صورت غیر صوری چنین ادعا می‌کند که مفهوم درستی در S نمی‌تواند در داخل سیستم S تعریف شود [← [۶] صفحه ۱۷۶ و [۱۳] صفحه ۱۵۱].

[۱۱] شاید تنها قصیه مهم در مورد محدودیت‌های سیستم صوری که در انجا به چشم نمی‌خورد، قصیه گودل در مورد اثبات‌ناپذیری سازگاری است (که بیان می‌دارد اگر سیستم حسابی سازگار باشد در ان صورت نمی‌تواند سازگاری خودش را اثبات کند) که به عنوان یک قضیه متفاوت در سطح صوری‌سازی ما نیست چرا که نسخه صوری قضیه ناتمامیت خود در یک سطح عمیق‌تر (سیستم حساب) داده شده است.

آن اعداد به جملات طوری نسبت داده می‌شوند که تابع نام‌گذاری حاصل مهمترین خصوصیت نام‌گذاری‌ها در زبان‌های طبیعی را داشته باشد و آن این خصوصیت است که نام هر جمله شامل همه اطلاعات مهم شئ نام‌گذاری شده باشد (مشخصاً نسخه مذکور از جملات یک زبان معمولی در این مورد ایده‌آل است). سیستم نام‌گذاری که به چنین تابع نام‌گذاری مجهز باشد قدرت بیان زبان‌های طبیعی را به ارث می‌برد. از جمله این خصوصیات، خاصیت خودارجاعی و این حقیقت است که P در آن‌ها قابل نمایش است. در یک بیان غیر دقیق، قدرت بیانگری حساب با قدرت بیانگری زبان‌های طبیعی قابل مقایسه می‌باشد زیرا که زبان حساب هم می‌تواند راجع به خودش صحبت کند. ◎

اکنون اجازه دهید قضیه‌ی فوق را در یک روش غیر استاندارد از جهت عکس به‌کار ببریم. پرِسبورگر[۱۲] نشان داد که نظریه اعداد جمعی (یک نسخه‌ی تضعیف یافته از حساب استاندارد پئانو به وسیله‌ی حذف عمل ضرب) تمام است [۸]. در این سیستم، مجموعه‌ی همه‌ی مفاهیم شماراست و این سوال که عبارت داده شده یک جمله‌ی اثبات‌پذیر است یا نه، تصمیم‌پذیر است. این نتیجه از این حقیقت نتیجه می‌شود که مجموعه همه برهان‌ها شمارا است و بنابر تمامیت برای هر جمله، خود جمله یا نقیضش بایستی آخرین عبارت از یک برهان باشد. لذا تابع نام‌گذاری g، می‌تواند به وسیله‌ی بازگشت، که در ادامه بیان می‌شود، تعریف شود. برای هر عبارت e، $g(e)$ را بر اساس این‌که e یک جمله‌ی اثبات‌پذیر است یا نه، به ترتیب کوچکترین عدد طبیعی زوج یا فردی می‌گیریم که قبلاً انتخاب نشده است.

$$g(e)=\begin{cases}\text{کوچکترین عدد زوج قبلاً انتخاب نشده} & \text{اگر } e \text{ عبارتی اثبات‌پذیر است}\\ \text{کوچکترین عدد فرد قبلاً انتخاب نشده} & \text{اگر } e \text{ عبارتی اثبات‌ناپذیر است}\end{cases}$$

حال از درست و تمام بودن سیستم مفروض داریم $P = T$. از طرف دیگر، از آنجایی که سیستم شامل فرمول‌های به فرم $(\exists y)(y+y=x)$ و $(\forall y)(y+y\neq x)$ می‌باشد لذا هر دو مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی و اعداد فرد طبیعی، نمایش‌پذیرند. همچنین در این سیستم، $\mathbf{T}$، $\mathbf{P}$ و $\mathbf{P}^{\complement}$ همگی P و T-نمایش‌پذیرند (لذا درستی تعریف‌پذیر است[۱۳]) و بنابر قضیه (۲.۶.۳)، این سیستم نسبت

[۱۲] M. Presburger

[۱۳] به عبارت دیگر، یک مثال بسیار طبیعی از سیستمی داریم که می‌تواند درستی خودش را تعریف کند. در واقع این مثال بسیار روشن‌تر و خودبیانگرتر از مثالی است که مای‌هیل در مرجع [۱۴] ارائه داده است.

به P یا T خودارجاع نیست. این مثال به همراه این حقایق که از یک طرف نتیجه‌ی ناتمامیت گودل مثال‌هایی از خودارجاعی سیستم‌های منطقی که $\mathbf{P}$ نمایش‌پذیر باشد (لذا سیستم‌ها ناتمام‌اند) را ارائه می‌دهد و از طرف دیگر، قضیه‌ی قبلی ما (۲.۶.۳) نشان می‌دهد که $\mathbf{P}$ در این سیستم‌های منطقی خودارجاع که $P = T$ (چون این سیستم‌ها تمام، درست و سازگارند)، نمایش‌پذیر نیست، یک توصیف کامل از تناظر دوسویه بین خواص عمومی خودارجاعی، نمایش‌پذیری و تمامیت را می‌دهد. در همین حال، قضیه‌ی فوق تنها در مورد یک سیستم منطقی انتزاعی بوده و چیزی در مورد خصوصیات مفاهیم احتمالی مربوط به ماهیت اصلی ناتمامیت، تعریف‌ناپذیری و تصمیم‌ناپذیری، نمی‌گوید. برای صراحت بیشتر، چون مجموعه جملات درست، بنابر تعریف، بیشینه است، این سوال در مورد ناتمامیت و تصمیم‌ناپذیری اثبات‌پذیری، تنها در مورد عبارات مجموعه جملات اثبات‌پذیر مطرح می‌شود. اجازه دهید ابتدا سوال مربوط به تصمیم‌ناپذیری را بررسی کنیم، چون یک احتمال مشهودی وجود دارد که بتوانیم توسیع قضیه‌ی دروغگو را در این راستا اصلاح کنیم. برای این کار دو روش وجود دارد: به‌کار بردن توسیع قضیه‌ی دروغگو در سیستم‌های منطقی و یا کاربردهای مستقیم آن. ما تنها یکی از این دو گزینه را به‌کار خواهیم برد. در حقیقت، می‌توانیم رویکرد دیگری را برگزینیم که از مفهوم نقیض برای تعریف یک نسخه از مفهوم نمایش‌پذیری، استفاده می‌کند. به وسیله‌ی این خاصیت جدید در دسترس‌مان، قبل از به‌کارگیری توسیع قضیه‌ی دروغگو (۳.۵.۳) در سیستم‌های منطقی، ابتدا می‌توانیم ادعا و برهان قضیه را اصلاح کنیم (دوباره در روشی که برهان اولیه روی جمله‌ی دروغگو که به وسیله‌ی جایگزینی نقیضش حاصل شده است). نسخه‌ی متقارن از قضیه‌ی حاصل از این روش، یک نسخه‌ی انتزاعی پایدار از قضیه‌ی چرچ را می‌دهد.

تعریف ۳.۶.۳. فرض کنید $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, P, T,')$ یک سیستم منطقی بوده و $A \subseteq S$ و $X \subseteq N$ باشند:

(a) برای هر $X \subseteq N$، گوییم X قویاً A-نمایش‌پذیر(در $\mathcal{L}$) است اگر $\varphi \in F$ی موجود باشد که X و $X^{\complement}$ به‌ترتیب نسبت به φ و φ'، A-نمایش‌پذیر باشند. φ، قویاً A-نمایشگر X (در $\mathcal{L}$) است.

(b) گوییم $\mathcal{L}$ قویاً خودارجاع نسبت به A است اگر برای هر $X \subseteq N$، که X قویاً A-نمایش‌پذیر است، مجموعه‌ی $\{n \in N : g(g^{-1}(n)[n]) \in X\}$ نیز قویاً A-نمایش‌پذیر باشد. ◎

قضیه ۴.۶.۳ (تعمیم متقارن قضیه‌ی دروغگو)**.** *فرض کنید $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, B, T,')$ یک سیستم منطقی و $A \subseteq F$ بوده و $\mathcal{L}$ قویاً خودارجاع نسبت به B و $\mathbf{A}$ قویاً B-نمایش‌پذیر باشد. در این‌صورت یک*

$S \ni \lambda$ ی وجود دارد که:

(i) $\lambda \notin A$ اگر و تنها اگر $\lambda \in B$؛

(ii) $\lambda \in A$ اگر و تنها اگر $\lambda' \in B$.

برهان. چون $\mathbf{A}$ قویاً B-نمایش‌پذیر است و $\mathcal{L}$ قویاً خودارجاع نسبت به B می‌باشد، $\pi \in F$ی وجود دارد که برای هر $n \in N$، $\pi[n] \in B$ اگر و تنها اگر $g(g^{-1}(n)[n]) \in \mathbf{A}$ و $\pi'[n] \in B$ اگر و تنها اگر $g(g^{-1}(n)[n]) \notin \mathbf{A}$. فرض کنید $m = g(\pi')$ و $\lambda = \pi'[g(\pi')]$. در این صورت $\lambda \in S$ و $\lambda = \pi'[g(\pi')] \in B$ اگر و تنها اگر $\pi'[m] \in B$ اگر و تنها اگر $g(g^{-1}(m)[m]) \notin \mathbf{A}$ اگر و تنها اگر $g^{-1}(m)[m] \notin A$ اگر و تنها اگر $g^{-1}(g(\pi'))[g(\pi')] \notin A$ اگر و تنها اگر $\lambda = \pi'[g(\pi')] \notin A$. به عبارت دیگر، $\lambda' = (\pi'[g(\pi')])' \in B$ اگر تنها اگر $\pi''[g(\pi')] \in B$ اگر و تنها اگر $\pi[g(\pi')] \in B$ اگر و تنها اگر $\pi[m] \in B$ اگر و تنها اگر $g(g^{-1}(m)[m]) \in \mathbf{A}$ اگر و تنها اگر $g(g^{-1}(m)[m]) \in A$ اگر و تنها اگر $\lambda = \pi'[g(\pi')] \notin A$، که این برهان را تمام می‌کند. ⊞

حال هر دو مفهوم P-نمایش‌پذیری (۱.۵.۳) و نسخه‌ی قوی آن (۳.۶.۳)، رده‌بندی اصلی از سیستم‌های منطقی را از نکته نظر عملی و کاربردی فراهم می‌سازند. در هر سیستم منطقی استاندارد که حساب اعداد طبیعی را تعریف می‌کند، P-نمایش‌پذیری مجموعه همه‌ی نام‌های جملات اثبات‌پذیر در سیستم منطقی دیگر (که برخی شرایط طبیعی را برآورده می‌کند)، یک قرین صوری از خاصیت غیر صوری آن است. در این سیستم دیگر، اثبات‌پذیری می‌تواند از میان یک مجموعه‌ی تصمیم‌پذیر از اصول تعریف شود [$\leftarrow$ یادداشت (۴)]. بنابراین در حضور یک سیستم منطقی $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, P, T,')$ که با استفاده از برخی روش‌ها ثابت شده است، طبیعی است که P-نمایش‌پذیری مجموعه همه‌ی نام‌های جملات اثبات‌پذیر را در یک سیستم منطقی $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, Q, T,')$، به عنوان مفهوم رده‌بندی شده‌ی انتزاعی اثبات‌پذیری در $\mathcal{M}$ از نکته نظر تعریف‌پذیری‌اش توسط یک مجموعه‌ی تصمیم‌پذیر از اصول، انتخاب کنیم. به عبارت دیگر، در سیستم‌های منطقی معمول حساب (که مجموعه‌ی نام‌ها یک زیرمجموعه از اعداد طبیعی است)، قویاً P-نمایشپذیری یک مجموعه‌ی دلخواه از اعداد طبیعی، یکی از چندین خاصیت معادل تدبیر شده برای فرمول‌بندی مفهوم تصمیم‌پذیری این‌که یک عدد عضو مجموعه‌ی مطرح شده باشد یا نباشد، است [$\leftarrow$ یادداشت (۵)].

این حقیقت یک روش روشن برای تعریف نسخه‌ی انتزاعی از تصمیم‌پذیری اثبات‌پذیری مربوط به سیستم منطقی که ما به آن علاقه‌مندیم را پیشنهاد می‌کند.

یادداشت ۴. تصمیم‌پذیری مجموعه اصول به این معنی است که یک روش کاملاً تکنیکی وجود دارد که در مورد اصل موضوع بودن یا نبودن یک جمله تصمیم می‌گیرد. خاصیت صوری که ما در موردش صحبت می‌کنیم در واقع یک انتخاب محتمل به عنوان نسخه صوری از مفهوم غیر صوری است، به این معنی که P-نمایش‌پذیری مجموعه همه اسامی جملات اثبات‌پذیر، وجود مجموعه تصمیم‌پذیر از اصول را نتیجه می‌دهد. اولاً، در همه سیستم‌های منطقی که ریاضیات حقیقی را (که مفهوم برهان را در روشی که در صفحه ۴۵ مختصراً شرح دادیم، تعریف می‌کند) صوری می‌کنند، مجموعه جملات اثبات‌پذیر فقط در صورتی شمارا است که یک مجموعه تصمیم‌پذیر از اصول وجود داشته باشد [۱۹]. این ارتباط از یک جهت بدیهی است، در واقع اگر فرض کنیم که مجموعه‌ای از اصول وجود داشته باشد در این صورت در سیستم‌های مربوط، مجموعه همه دنباله‌های عبارات -که خودشان دنباله‌ای متناهی از نمادهای منتخب از یک کلمه متناهی هستند- شمارا هستند که این به نوبه خود یک روش تکنیکی مجرد را نتیجه می‌دهد. علاوه بر آن، قواعد استنتاج -دقیقاً همانند جهان ریاضیات غیر صوری- طوری تعریف شده‌اند که این حقیقت که یک دنباله از عبارات یک برهان مجموعه تصمیم‌پذیر از اصول هست یا نه، در یک تعداد گام متناهی تصمیم‌پذیر باشد. بنابراین یک شمارش از مجموعه همه دنباله‌های متناهی از عبارات، یک شمارش از مجموعه برهان‌ها را نتیجه می‌دهد و بنابراین مجموعه همه جملات اثبات‌پذیر نیز شمارا است. ثانیاً، اصول تمامی سیستم‌های حساب با استفاده از یک روش تصمیم‌پذیر ساخته شده‌اند. در نتیجه، در یک سیستم استاندارد حساب همانند $\mathcal{A} = (\mathcal{S}, P, T,')$ (که در آن مجموعه N از اسامی، یک زیرمجموعه از اعداد طبیعی است) مجموعه جملات اثبات‌پذیر شمارا است، که به نوبه خود شمارایی هر مجموعه P-نمایش‌پذیر از اعداد طبیعی را نتیجه می‌دهد (زیرا اینکه یک جمله نتیجه جانشینی یک عدد در یک فرمول هست یا نه، تصمیم‌پذیر است). اکنون فرض کنید $\mathcal{M}$ یک سیستم منطقی دلخواه باشد که قسمتی از ریاضیات حقیقی را صوری می‌کند و مجموعه نام‌های $\mathcal{M}$ نیز زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد. در این صورت، تابع نام‌گذاری در $\mathcal{M}$ می‌تواند طوری تعریف شود که هر مقدار از تابع معکوس آن در یک تعداد گام محدود قابل محاسبه شود [$\leftarrow$ یادداشت (۳)]. بنابراین اگر Q

مجموعه جملات اثبات‌پذیر از $\mathcal{M}$ و $\mathbf{Q}$، P-نمایش‌پذیر باشند، در این صورت $\mathbf{Q}$ و نیز Q شمارا خواهند بود. بنابراین Q به وسیله یک مجموعه تصمیم‌پذیر از اصول تعریف می‌شود. ◎

یادداشت ۵. در واقع اگر بخواهیم وارد جزئیات شویم، خاصیت غیر صوری که می‌خواهیم فرمول بندی کنیم چنین است: برای هر مجموعه از اعداد طبیعی، روشی کاملاً تکنیکی وجود دارد که برای هر عدد طبیعی n، این‌که n عضو این مجموعه مفروض هست یا نه، تصمیم‌پذیر است. همچنین به راحتی می‌توان نشان داد که P-نمایش‌پذیری قوی، یک انتخاب محتمل برای نسخه صوری تصمیم‌پذیری است، یعنی P-نمایش‌پذیری قوی تصمیم‌پذیری را نتیجه می‌دهد. از آنجایی که P-نمایش‌پذیری یک مجموعه، شمارایی آن را نتیجه می‌دهد [$\leftarrow$ یادداشت قبلی]، P-نمایش‌پذیری قوی یک مجموعه، شمارایی یک مجموعه و متمم آن را تضمین می‌کند. برای تصمیم‌گیری در مورد اینکه یک عدد عضو چنین مجموعه‌ای می‌باشد، به طور همزمان شروع به شمردن مجموعه و متمم آن می‌کنیم تا جایی که دیر یا زود عدد در یکی از این مجموعه‌ها ظاهر شود. ◎

تعریف ۳.۶.۵. فرض کنید $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, P, T,')$ یک سیستم منطقی باشد. برای هر $Q \subseteq S$، چهارتایی $(\mathcal{S}, Q, T,')$ را زمانی که یک سیستم منطقی باشد با $\mathcal{L}_Q$ نشان خواهیم داد. در حالت خاص $\mathcal{L}_P = \mathcal{L}$. اگر $Q \supseteq P$، گوییم $\mathcal{L}_Q$ یک توسیع از $\mathcal{L}$ است و داریم:

(i) $\mathcal{L}_Q$، $\mathcal{L}$-اصل‌پذیر است اگر $\mathbf{Q}$، P-نمایش‌پذیر باشد.

(ii) $\mathcal{L}_Q$، $\mathcal{L}$-تصمیم‌پذیر است اگر $\mathbf{Q}$، قویاً P-نمایش‌پذیر باشد، در غیر این‌صورت $\mathcal{L}$-تصمیم ناپذیر است. ◎

گزاره ۳.۶.۶. *فرض کنید $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, P, T,')$ یک سیستم منطقی باشد که نسبت به P قویاً خودارجاع است. در این صورت هر توسیع سازگار از $\mathcal{L}$، $\mathcal{L}$-تصمیم‌ناپذیر است.*

برهان. فرض کنید $\mathcal{L}_Q$ توسیع سازگار از $\mathcal{L}$ باشد به طوری‌که $\mathcal{L}_Q$، $\mathcal{L}$-تصمیم‌پذیر است. در این صورت می‌توانیم قضیه‌ی تعمیم متقارن دروغگو (۳.۶.۴) را با جایگذاری‌های $A = Q$ و $B = P$ به‌کار گیریم، لذا $\lambda \in S$ی وجود دارد که

(i) $\lambda \notin Q$ اگر و تنها اگر $\lambda' \in P$ و (ii) $\lambda \in Q$ اگر و تنها اگر $\lambda \in P$.

حال $\lambda \in P$ منجر به تناقض می‌شود چون $\lambda \in Q$ ،$\lambda \in P \subseteq Q$ را نتیجه می‌دهد و در همان زمان بنابر (i)، $\lambda \notin Q$. در نتیجه $\lambda \notin P$ که باز از (i) نتیجه می‌شود $\lambda \in Q$. بنابراین از (ii) و $\lambda' \in P \subseteq Q$ داریم $\lambda' \in Q$. لذا $\lambda \in Q'$. اما این بدین معنی است که $\lambda \in Q \cap Q'$ و این با سازگاری $\mathcal{L}_Q$ تناقض دارد، لذا برهان نتیجه می‌شود. ⊞

با داشتن اثبات نسخه‌ی انتزاعی پایدار از قضیه‌ی چرچ درباره‌ی تصمیم‌ناپذیری ذاتی حساب[۱۴]، می‌توانیم تلاشی برای توسیع قضایای ناتمامیت انتزاعی در همان جهت، انجام دهیم. اکنون، این اولین بار در طرح است که با دغدغه‌ی ایجاد شده به وسیله‌ی محدودیت قدرت بیان فرا زبانی که به وسیله‌ی تعریف سیستم‌های منطقی انتخاب کردیم، مواجه می‌شویم. برای مهار این دغدغه، مجبوریم نسخه‌ی قوی‌تری از اصل‌بندی را که نسخه‌ی توسیع‌یافته‌ی تمامیت و درستی استفاده می‌کند، معرفی کنیم. همچنین نیازمند یک نسخه‌ی قوی از خودارجاعی هستیم.

تعریف ۷.۶.۳. فرض کنید $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, P, T,')$ یک سیستم منطقی بوده و $\Delta \subseteq F$ تحت جایگزینی بسته است.

(a) گوییم $\mathcal{L}$، Δ-تمام است اگر $\Delta \cap T \subseteq P$ باشد.

(b) گوییم $\mathcal{L}$، Δ-درست است اگر $\Delta \cap P \subseteq T$ باشد. ◎

قبل از ادامه، اجازه دهید نمادگذاری خود را کمی خلاصه کنیم. با در نظر گرفتن هرکدام از سیستم‌های استاندارد منطقی حساب[۱۵]، از اکنون، $\mathcal{P} = (\mathcal{S}, P, T,')$ را به عنوان یک سیستم منطقی دلخواه ثابت و $\Sigma \subseteq F$ را یک مجموعه دلخواه ثابت قرار می‌دهیم که در آن $\mathcal{P}$، Σ-تمام است.

تعریف ۸.۶.۳. (i) فرض کنید $Q \subseteq S$ دلخواه باشد.

(a) گوییم $\mathcal{P}_Q$، Σ-تمام $\mathcal{P}$-اصل‌پذیر است اگر $\mathbf{Q}$، P-نمایش‌پذیر به وسیله‌ی یک $\varphi \in \Sigma$ باشد.

[۱۴] قضیه اصلی در مرجع [۱۹] صفحه ۱۳۱ موجود می‌باشد.

[۱۵] به عنوان مثال می‌توان به حساب پئانو و حساب رابینسون که سیستم ضعیفتری است، اشاره کرد [← [۶] صفحه ۱۵۸].

(b) گوییم $\mathcal{P}_Q$، Σ-درست $\mathcal{P}$-اصل‌پذیر است اگر:

(۱) $\mathcal{P}$، برای یک $\Gamma \subseteq F$، Γ-درست باشد، و

(۲) $\mathbf{Q}$ به وسیله‌ی یک $\varphi \in \Sigma \cap \Gamma$، P-نمایش‌پذیر باشد.

(ii) گوییم $\mathcal{P}$ ذاتاً خودارجاع است اگر برای هر $Q \supseteq P$، $\mathcal{P}_Q$ نسبت به Q خودارجاع باشد. ◎

از بین همه این مفاهیم جدید، به نظر می‌رسد که مفهوم Δ-تمام، توسیعی از یک مفهوم واقعی حساب است. در واقع، در حساب صوری، یک مجموعه از فرمول‌ها (معمولا با Σ_1 نشان داده می‌شود) وجود دارد که اصل‌پذیری و اصل‌پذیری تمام را هم‌زمان برآورده می‌کند [۷]. تا جایی‌که به مفهوم خودارجاعی ذاتی در سیستم‌های حساب مربوط است این [خودارجاعی ذاتی] نتیجه‌ای فوری از خودارجاعی است، بنابراین این حقیقت برای خودارجاعی قوی (۳.۶.۳) نیز برقرار است. به عبارت دیگر، تنها دلیل برای معرفی مفهوم اصل‌پذیری درست این حقیقت است که به‌کاربردن این شرط تنها راه برای احیا کردن -حداقل در برخی فرم‌های ضعیف‌تر- نسخه‌ی نحوی گسترش‌یافته قضیه‌ی گودل در چنین چهارچوب انتزاعی کنونی باشد. مفهومی که در شکلی متفاوت‌تر در یک تبصره از [۲۲] (صفحه ۸۴۱) ظاهر شده است.

گزاره ۹.۶.۳.

(i) *فرض کنید که $\mathcal{P}$ ذاتاً خودارجاع باشد. در این صورت هر توسیع Σ-درست $\mathcal{P}$-اصل‌پذیر سازگار از $\mathcal{P}$، ناتمام است.*

(ii) *فرض کنید که $\mathcal{P}$ نسبت به T خودارجاع است. اگر $\mathcal{P}$ درست باشد در این صورت هر Σ-تمام $\mathcal{P}$-اصل‌پذیر درست $\mathcal{P}_Q$، ناتمام است.*

برهان. (i) فرض کنید $\mathcal{P}_Q$ یک توسیع Σ-درست $\mathcal{P}$-اصل‌پذیر سازگار از $\mathcal{P}$ باشد. در این صورت $\Gamma \subseteq F$ و $\varphi \in \Sigma \cap \Gamma$ وجود دارند که $\Gamma \cap Q \subseteq T$ و $\mathbf{Q}$، P-نمایش‌پذیر به وسیله‌ی φ است. بنابر (۲.۶.۳) (i) قسمت (a)، کافیست نشان دهیم که $\mathbf{Q}$ به وسیله‌ی φ، Q-نمایش‌پذیر است. اکنون فرض کنید $n \in N$ دلخواه باشد، پس $n \in \mathbf{Q}$ نتیجه می‌دهد $\varphi[n] \in P \subseteq Q$، و در نتیجه $\varphi[n] \in Q$. پس $\varphi[n] \in \Gamma \cap Q \subseteq T$. بنابراین $\varphi[n] \in \Sigma \cap T$ به همراه Σ-تمامیت $\mathcal{P}$، $\varphi[n] \in P$ را نتیجه می‌دهد.

(ii) فرض کنید $Q \subseteq S$ دلخواه و $\mathcal{P}_Q$، Σ-کامل $\mathcal{P}$-اصل‌پذیر درست باشد. لذا یک $\varphi \in \Sigma$ وجود دارد که $\mathbf{Q}$، P-نمایش‌پذیر به وسیله‌ی φ است. ابتدا نشان می‌دهیم که $\mathbf{Q}$ نیز T-نمایش‌پذیر توسط φ است که در این صورت می‌توانیم قضیه‌ی (۲.۶.۳) (i) قسمت (b) را برای $\mathcal{P}_Q$ به‌کار گیریم. فرض کنید $n \in N$ دلخواه باشد، لذا $n \in \mathbf{Q}$، $\varphi[n] \in P \subseteq T$ را نتیجه می‌دهد ($\mathcal{P}$ را درست فرض کردیم) بنابراین $\varphi[n] \in T$. به عبارت دیگر، از $\varphi[n] \in T$، $\varphi[n] \in \Sigma \cap T$ به دست می‌آید و این بنابر Σ-تمامیت $\mathcal{P}$، $\varphi[n] \in P$ یا $n \in \mathbf{Q}$ را نتیجه می‌دهد. از آنجایی‌که خودارجاعی $\mathcal{P}$ نسبت به T، همان را برای $\mathcal{P}_Q$ نتیجه می‌دهد، لذا قضیه‌ی (۲.۶.۳) (i) قسمت (b) برای $\mathcal{P}_Q$ به‌کار می‌رود. در نتیجه $T - Q \neq \emptyset$. برای کامل کردن برهان، کافی است به این حقیقت بازگردیم که یک سیستم درست فقط در مورد همه جملات درستی که اثبات‌پذیرند، کامل است. ⊞

در بخش حسابی گزاره بالا هر دو شرط اصل‌پذیری صحیح و تمامیت می‌توانند به فقط اصل‌پذیری تقلیل یابند، به عنوان مثال مرجع [۶] صفحه ۱۷۹ و مرجع [۳] صفحه ۱۰۰ را ببینید. در حالت اصل‌پذیری تام این حقیقت از معادل بودن اصل‌پذیری و اصل‌پذیری تام در درون حساب به دست می‌آید. پس به نوعی قسمت دوم قضیه فوق خوانش انتزاعی پایایی از متناظر حسابی آن است. به هر روی نتیجه حسابی در واقعیت نتیجه‌ای قوی‌تر از متناظر مجرد آن است. در حقیقت حضور شرط تضعیف کننده‌ء قسمت اول گزاره بالا نشانه‌ای از این حقیقت است که با صوری سازی آن ما به محدودیت نهایی طرح خود توسط پارادوکس دروغگو رسیده‌ایم. در حقیقت این جمله تنها خوانش انتزاعی ما از نتایجمان در مورد محدودیت‌های نظری سیستم‌های صوری است که قسمت‌های حسابی آن‌ها می‌توانند به طور اساسی قوی‌تر شوند؛ به نظر می‌رسد که این جمله آخرین جمله‌ای است که بر پایه پارادوکس دروغگو می‌توانیم به آن برسیم [← یادداشت (۶)]. شایان توجه است که قضیه تعمیم متقارن دروغگو (۴.۶.۳) می‌تواند برای صوری‌سازی نسخه‌ی انتزاعی قضیه‌ی چرچ (۲.۳.۱) در مفاهیم مجموعه‌های بازگشتی استفاده شود.

یادداشت ۶. حقایقی وجود دارند که ادعای ما را پشتیبانی می‌کنند. دو روش استاندارد برای اثبات نسخه حسابی قوی‌تر این بیان وجود دارد که به نظر می‌رسد هیچ کدام آن‌ها نمی‌تواند در چهارچوب

انتزاعی ما بازنویسی شود. برهان اول که یک برهان سازنده (ساختنی) است و در آن به جای جملات گودلی (حسابی شده جمله صوری پارادوکس تعمیم یافته دروغگو)، توسط راسر بر اساس یک جمله صوری بسیار پیچیده ارائه شده است. اما گزاره راسر از برخی ویژگی‌های خاص زبان حساب استفاده کرده است که قرین انتزاعی ندارند. از جمله، گزاره راسر امکان صحبت در مورد ترتیب جملات را به واسطه خصوصیت زبان اعداد طبیعی دارد که در زبان‌های طبیعی این امکان وجود ندارد [→ [۱۳] صفحه ۱۴۷-۱۴۵]. دومین برهان یک برهان غیرسازنده است. همانند تمامی برهان‌های غیرسازنده، برهان دوم نغزتر است، زیرا که برهان دوم به صورت شهودی از این حقیقت قابل قبول که سیستم‌های کامل اصل‌پذیر حساب تصمیم‌پذیرند، استفاده می‌کند که به نوبه خود با استفاده از قضیه چرچ بلافاصله نتیجه می‌دهد که هر توسیع اصل‌پذیر شامل اصول پئانو، ناتمام است [→ [۱۹] صفحه ۱۳۲]. اثبات صوری تصمیم‌پذیری سیستم‌های کامل اصل‌پذیر حساب که بر اساس ساختار داخلی اثبات‌پذیری P-نمایش‌پذیری فرمول‌ها می‌باشد، اصولاً نمی‌تواند در سیستم انتزاعی ما بازنویسی شود. ⊚

تعریف ۱۰.۶.۳. هر $Z \subseteq N$ را $\mathcal{P}$-بازگشتی نامیم اگر Z قویاً P-نمایش‌پذیرباشد. مجموعه‌های $X, Y \subseteq N$ را جداپذیر $\mathcal{P}$-بازگشتی نامیم هرگاه یک $\mathcal{P}$-بازگشتی $Z \subseteq N$ وجود داشته باشد که $X \subseteq Z$ و $Y \cap Z = \emptyset$ باشد. به وضوح، جداپذیری یک رابطه متقارن است. یک توسیع $\mathcal{P}_Q$ از $\mathcal{P}$ را جداناپذیر $\mathcal{P}$-بازگشتی نامیم هرگاه $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{Q}'$ جداپذیر $\mathcal{P}$-بازگشتی نباشند. ⊚

اکنون با استفاده از قضیه تعمیم متقارن دروغگو (۴.۶.۳) می‌توانیم برهان انتزاعی قضیه چرچ (۲.۳.۱) را تکرار کنیم و به دست آوریم:

گزاره ۱۱.۶.۳. *اگر $\mathcal{P}$ نسبت به P قویاً خودارجاع باشد، آنگاه $\mathcal{P}$ جداناپذیر $\mathcal{P}$-بازگشتی است.*

برهان. فرض کنید (فرض خلف) که یک $Z \subseteq N$، $\mathcal{P}$-بازگشتی وجود دارد که به $\mathbf{P}$ و $\mathbf{P}'$ تفکیک شده است. در این صورت Z به وسیله‌ی یک $\varphi \in F$ قویاً P-نمایش‌پذیر است. قرار دهید $C = \{g^{-1}(n) \in F : \varphi[n] \in P\}$. در این صورت $\mathbf{C} = Z$ و بنابراین $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{C}$ و $\mathbf{P}' \cap \mathbf{C} = \emptyset$ را داریم، که $P \subseteq C$ و $P' \cap C = \emptyset$ را نتیجه می‌دهد. حال با به‌کار بستن قضیه تعمیم متقارن دروغگو

(۴.۶.۳) با جایگذاری $A = C$ و $B = P$، یک $\lambda \in S$ وجود خواهد داشت که:

(i) $\lambda \notin C$ اگر و تنها اگر $\lambda \in P$ و (ii) $\lambda \in C$ اگر و تنها اگر $\lambda' \in P$.

حال، $\lambda \in P$ منجر به تناقض می‌شود زیرا $\lambda \in P \subseteq C$، $\lambda \in C$ را نتیجه می‌دهد و از طرفی بنابر (i)، $\lambda \notin C$. بنابراین $\lambda \notin P$ که دوباره از (i) نتیجه می‌شود $\lambda \in C$. پس بنابر (ii) و $\lambda' \in P$، داریم $\lambda \in P'$. بنابراین $\lambda \in P' \cap C = \emptyset$، که یک تناقض است و برهان به دست می‌آید. ⊞

واضح است که جداپذیر $\mathcal{P}$-بازگشتی بودن یکی از توسیع‌ها نتیجه مشابهی برای $\mathcal{P}$ می‌دهد.

تبصره ۱۲.۶.۳. *اگر $\mathcal{P}$، نسبت به P قویاً خودارجاع باشد، در این صورت هر توسیعی از $\mathcal{P}$، جداناپذیر $\mathcal{P}$-بازگشتی است.* ⊚

اجازه دهید تحلیل خود را در یک نمادگذاری یکپارچه از آن گزاره‌هایی که در یک چهارچوب صوری انتزاعی می‌توانند به عنوان فرمول‌بندی کمابیش مستقیم از پارادوکس دروغگو در نظر گرفته شوند، را خلاصه کنیم:

قضیه ۱۳.۶.۳ (نسخه‌ی انتزاعی از قضیه‌های گودل، تارسکی و چرچ). *فرض کنید که $\mathcal{P}$ ذاتاً خودارجاع بوده و نسبت به T خودارجاع و نسبت به P قویاً خودارجاع باشد.*

(i) (a) *فرض کنید که $\mathcal{P}$، $\mathcal{P}$-اصل‌پذیر باشد. اگر $\mathcal{P}$ سازگار باشد در این‌صورت $\mathcal{P}$ ناتمام است.*

(b) *هر توسیع Σ-درست $\mathcal{P}$-اصل‌پذیر سازگار از $\mathcal{P}$ ناتمام است.*

(c) *اگر $\mathcal{P}$ درست باشد، هر توسیع Σ-تمام $\mathcal{P}$-اصل‌پذیر Q از $\mathcal{P}$ ناتمام است. در حالت خاص، هر توسیع Σ-تمام $\mathcal{P}$-اصل‌پذیر درست از $\mathcal{P}$، ناتمام است.*

(ii) *$\mathbf{T}$، T-نمایش‌پذیر نیست.*

(iii) (a) *هر توسیع سازگار $\mathcal{P}$، $\mathcal{P}$-تصمیم ناپذیر است.*

(b) *هر توسیع از $\mathcal{P}$، جداناپذیر $\mathcal{P}$-بازگشتی است.*

شایان ذکر است که این قضیه همچنین نسخه‌ی انتزاعی سه شرط نتیجه محدودکننده در مورد درستی حساب را نتیجه می‌دهد. در حقیقت، نسخه‌ی انتزاعی قضیه‌ی تارسکی درباره‌ی «تصمیم ناپذیری درستی حساب» به طور صریح در قضیه ذکر شده است، در حالی که بقیه جملات می‌توانند از این حقیقت که «درستی حساب تصمیم ناپذیر است و نمی‌تواند اصل‌پذیر شود»[۱۶] نتیجه شوند. در حقیقت بنابر تعریف، $\mathcal{P}_T$ یک سیستم منطقی درست، تمام و سازگار است. بنابراین از قضیه (۱۳.۶.۳) قسمت $(c)(i)$ و $(a)(ii)$، داریم:

تبصره ۱۴.۶.۳. *فرض کنید شرایط قضیه فوق برقرار است. اگر $\mathcal{P}$ درست باشد، آنگاه:*

(i) $\mathcal{P}_T$، Σ-*کامل* $\mathcal{P}$-*اصل‌پذیر نیست.*

(ii) $\mathcal{P}_T$، $\mathcal{P}$-*تصمیم ناپذیر است.*

---

[۱۶] ← [۶] صفحات ۱۷۶ و ۱۷۹.

مراجع

[1] S. Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press, New York, 2nd ed. 2010.

[2] M. Baaz and P. Pudlák, *Kreisel's Conjecture for $L\exists_1$*, in: P. Clote and J. Krajícek (eds.) Arithmetic, Proof Theory, and Computational Complexity.

Claredon Press, Oxford, 1993, pages 30–60.

[3] D.W. Barnes and J.M. Mack, *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[4] J.L. Bell, *Incompleteness in a General Setting*, The Bulletin of Symbolic Logic, 13: 21–30, 2007.

[5] J.L. Bell, *Set Theory: Boolean-Valued Models and Independence Proofs*, Clarendon Prees, Oxford, 2005.

[6] G.S. Boolos, J.P. Burgess and R.C. Jeffrey, *Computability and Logic*, Cambridge University Prees, 5th ed. 2007.

[7] G.S. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[8] C. Chang and H.J. Keisler, *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[9] J.N. Findlay, *Goedelian Sentences,* A Non-numerical Approach, Mind, 51: 259–265, 1942.

[10] K. Gödel, *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems,* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1962.

[11] R.E. Grandy, *Advanced Logic for Applications*, D. Reidel, Dordrecht, 1979.

[12] M.H. Löb, *Solution of a Problem of Leon Henkin,* The Journal of Symbolic Logic, 20: 115–118, 1955.

[13] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Taylor & Francis Group, Chapman & Hall/CRC, 5th ed. 2010.

[14] J. Myhill, *A System which Can Define its Own Truth,* Fundamenta Mathematicae, 37: 190–192, 1950.

[15] R.J. Parikh, *Some Results on the Length of Proofs,* Transactions of the American Mathematical Society, 177: 29–36, 1973.

[16] W.V. Quine, *Mathematical Logic,* Harvard University Press, Cambridge, 1951.

[17] G. Ryle, *Heterologicality,* Analysis, 11: 61–69, 1951.

[18] G. Serény, *Gödel, Tarski, Church, and the Liar*, The Bulletin of Symbolic Logic, 9: 3–24, 2003.

[19] J.R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Addison–Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.

[20] R.M. Smullyan, *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, New York, 1992.

[21] R.M. Smullyan, *Languages in which Self Reference is Possible*, The Journal of Symbolic Logic, 22: 55–67, 1957.

[22] C. Smoryński, *The Incompleteness Theorems,* in: J. Barwise (ed.) Handbook of Mathematical Logic, North–Holland, Amsterdam, 1977, pages 821–865.

[23] A. Tarski, *The Semantic Conception of Truth,* Philosophy and Phenomenological Research, 4: 341–376, 1944.

[۲۴] دی سی لیندبرگ، سرآغازهای علم در غرب، ترجمه‌ی فریدون بدره‌ای، انتشارات علمی فرهنگی، چاپ اول ۱۳۷۷.

[۲۵] محمد صال مصلحیان، فلسفه ریاضی، انتشارات واژگان خرد، چاپ اول ۱۳۸۴.

[۲۶] ضیاء موحد، منطق موجّهات، انتشارات هرمس، چاپ اول ۱۳۸۱.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

A-نمایش‌پذیر .... A-representable
اثبات‌پذیری .... provability
اصول .... principles
بازگشتی .... recursive
باطل‌نما .... antinomy
پارادوکس دروغگو .... Liar paradox
پایان‌ناپذیری .... inexhaustibility
تمام .... complete
تصمیم ناپذیر .... undecidable
تعریف ناپذیر .... undefinabile
تفکیک‌پذیر .... separable
جبر هیتینگ .... Heyting algebra
خود ارجاع .... self-refrence
خودمصداق .... autological
خودنامصداق .... heterological
خودریختی .... self-map
درست .... sound
ذاتی .... hereditarily

ردشدنی .... refutable
رضایت‌بخش .... satisfactory
سازگار .... consistent
سازگاری داخلی .... internal consistency
شهودی .... intuitionistic
صدق‌پذیر .... satisfiable
عضو متمایز .... distinct elemant
قطری‌سازی .... diagonalization
کدپذیر .... codable
گردایه کدگذاری .... coding assemblege
گزاره .... proposition
محمول .... predicate
معنایی .... semantic
منطق موجهات .... modal logic
ناتمامیت گودل .... Gödel's incompleteness
ناسازگاری .... inconsistency
نحوی .... syntactic
نقطه ثابت قوی .... strong fixed point
نقیض .... negation
نگاشت تارسکی .... Tarski map
نگاشت جایگزینی .... substitution map
نگاشت قطری .... diagonal map
نگاشت گودل .... Gödel map
نماینده کدگذار .... coding representation

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A-نمایش‌پذیر	A-representable
تناقض	antinomy
خودمصداق	autological
کدپذیر	codable
گردایه کدگذاری	coding assemblege
نماینده کدگذار	coding representation
تمام	complete
سازگار	consistent
قطری‌سازی	diagonalization
نگاشت قطری	diagonal map
عضو متمایز	distinct elemant
نگاشت گودل	Gödel map
ناتمامیت گودل	Gödel's incompleteness
پایان‌ناپذیری	inexhaustibility
ذاتی	hereditarily
خودنامصداق	heterological
جبر هیتینگ	Heyting algebra
ناسازگاری	inconsistency

سازگاری داخلی .... internal consistency
شهودی .... intuitionistic
پارادوکس دروغگو .... Liar paradox
منطق موجهات .... modal logic
نقیض .... negation
محمول .... predicate
اصول .... principles
گزاره .... proposition
اثبات‌پذیری .... provability
بازگشتی .... recursive
ردشدنی .... refutable
صدق‌پذیر .... satisfiable
رضایت‌بخش .... satisfactory
خودریختی .... self-map
خود ارجاع .... self-refrence
معنایی .... semantic
تفکیک‌پذیر .... separable
درست .... sound
نقطه ثابت قوی .... strong fixed point
نگاشت جایگزینی .... substitution map
نحوی .... syntactic
نگاشت تارسکی .... Tarski map
تصمیم‌ناپذیر .... undecidable
تعریف‌ناپذیر .... undefinable

نمایه

Surname: Mohammadian **Name:** Mina

Title: Incompleteness in a General Setting

Supervisor: Saeed Salehi

Advisor: Jafar Sadegh Eivazloo

Degree: Master of Science **Subject:** Pure Mathematics

Field: Mathematical Logic **University of Tabriz**

Faculty of Mathematical Sciences **Date:** 2013 **Number of Pages:** 70

Keywords: Gödel's incompleteness theorem, Consistancy, Tarski's theorem, Church's theorem.

Abstract

We present a general framework for proving Gödel's incompleteness theorems, which is due to Bell [4]. His suggested framework is free from syntactic and computational restrictions and is suitable for investigating Tarski's theorem and the incompleteness phenomena. The proof works in the field of algebraic structures, and an abstract coding system is introduced for that. For this purpose we study some important ideas in formal logic which relate to the incompleteness phenomena, with emphasize on Gödel's first and second incompleteness theorems.

In other words, we will study the following topics bassed on intuitionistic and constructive principles:

(1) Löb's logical analysis of the sentences which follow from their provability.

(2) The major role of the fixed point (diagonalization) technique in Löb's investigations.

(3) Incompleteness in modal logic.

We then study the Liar's Paradox and will show that the general idea behind the theorems of Gödel, Tarski and Church, which show some limitations of formal deduction systems, can be regarded as some different ways of resolving the Liar's Paradox [18].

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS (MATHEMATICAL LOGIC)

Incompleteness in a General Setting

Supervisor

Saeed Salehi

Advisor

Jafar Sadegh Eivazloo

by

Mina Mohammadian

2013